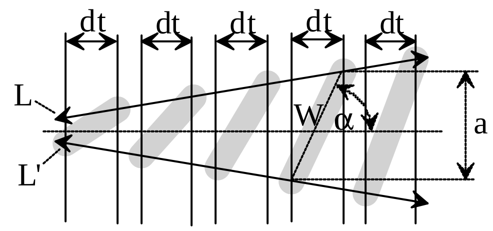
Kontinuierliche Wellenausbreitung

Zunächst sollen einige Fälle elementarer Wellenausbreitung unter Verzicht auf Brechzahländerungen untersucht werden.

Sphärische Öffnung

Eine Parallelverschiebung von Wellenfronten W ist nur dann möglich, wenn die impulsführenden Leitbahnen L, L' parallel zueinander verlaufen. Im Fall einer konischen, paraxialen Verjüngung oder einer ebensolchen Öffnung eines Leitbahnbündels verändert die Wellenfront ihre Einfallsrichtung.



Sphärische Öffnung

Die Richtung der Wellenfront W zur Achse $\tan a$ entsteht als Quotient aus mittlerem Abstand a der Leitbahnen und Zeitdifferenz dt der auf beiden Seiten laufenden Impulse.

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{a}{dt}}$$

Isotrope Krümmung mit orthogonaler Frontrichtung

Betrachten wir eine Impulsfront auf mehreren, parallelen Leitbahnen, deren Abstand vom Krümmungsmittelpunkt verschieden ist, und die sich durch eine Krümmung hindurch bewegt. In gleichen Zeiten durchlaufen die Impulse gleiche Wegstrecken. Der Umfang einer jeden Bahn ist proportional zum Radius. Soll die Entfernung AC gleich der Entfernung BE sein, muß gelten

$$\omega r_1 = \omega r_2 + s$$

wobei das Bogenmaß ω proportional dem Winkel *ß* ist.

$$\omega = \frac{\pi}{180°} ß$$

Die Strecke s läßt sich folglich als Funktion der Radien und des Winkels ausdrücken.

$$s = \omega\,(r_1 - r_2) = \omega a = \frac{\pi}{180°} ßa\ ; \quad \frac{s}{a} = \omega = \frac{\pi}{180°}$$

Der Winkel *ß'* läßt sich als Funktion der Strecken DE und DC auffassen.

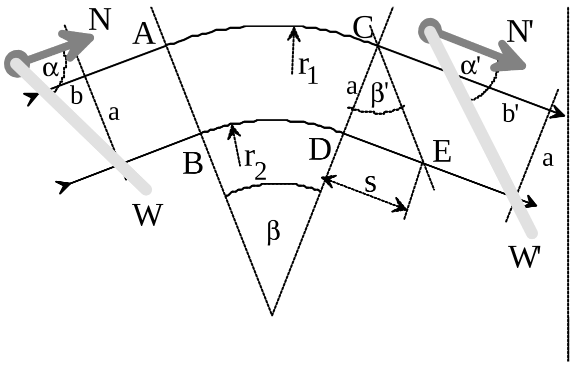
$$\tan ß' = \frac{DE}{DC} = \frac{s}{a}$$

Eine Gleichsetzung beider Gleichungen für s liefert eine Proportion für das Verhältnis der Ausrichtungen orthogonaler Wellenfronten vor und nach Passieren desKrümmungsabschnittes.

$$\tan\beta' = \frac{\pi}{180°}\beta$$

Für *kleine* Winkel *ß* besitzt der Tangens nahezu einen 45°- Anstieg, für kleine *ß* bleibt die Wellenfront folglich beim Durchlaufen der Krümmung in fast unveränderter Ausrichtung.

Steht die Wellenfront beim Eintritt in die Krümmung im Winkel a zur Normalen (Leitbahnrichtung) so besitzt sie beim Verlassen den Winkel a' zur abgehenden Leitbahnrichtung, die Winkel a, a' können über den Cotangens bestimmt werden.



$\cot\alpha = \frac{b}{a}$

$\cot\alpha' = \frac{b'}{a} = \frac{b+s}{a} = \cot\alpha + \beta$

Es entsteht eine Gleichung, die die Proportionen zwischen den Winkeln *a', a* und *b* bestimmt.

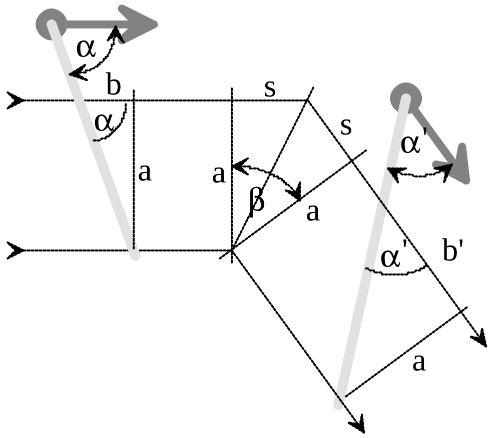
$$\boxed{\cot\alpha' = \cot\alpha + \frac{\pi}{180°}\beta}$$

Hat die Wellenfront vor Passieren einer Krümmung eine orthogonale Richtung zur Normalen (zur Leitbahnrichtung), so steht sie nach Verlassen der Krümmung um den Krümmungswinkel *ß-ß'* schräg zur ursprünglichen Wellennormalen (Leitbahnrichtung).

Isotrope Knickung

Eine Wellenfront möge eine Knickstelle passieren, an der die Leitbahnen um den Winkel *ß* zueinander geknickt seien. Die Wellenfront hat vor der Knickstelle den Winkel *a* zur Leitbahnnormalen. Sie verläßt die Knickstelle unter dem Winkel *a'*. Die Bezeichnung isotrope Knickung möge auf den Umstand gleichen Leitbahnabstandes *a* vor und hinter der Knickstelle hinweisen. Falls mehrere Leitbahnen die Knickstelle passieren, besäßen die äußeren Leitbahnen den Abstand *a*. Die Knickstelle verlängert die äußere Leitbahn um die Strecke *2s*. Dem entspricht der Winkel *b*. Die Strecke *s* kann mit *a* und dem Knickwinkel *b* ausgedrückt werden:

$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{s}{a}; \quad s = a\tan\frac{\beta}{2}$



Die Wellenfront besitzt die Richtung zur Leitbahnnormalen auf der linken Seite

$\cot\alpha = \frac{b}{a}; \quad b = a\cot\alpha$

und auf der rechten Seite entsprechend

$\cot\alpha' = \frac{b'}{a}$

Die Verlängerung des Laufweges auf der rechten Seite ergibt sich aus der der linken Seite (Vorzeichen beachten, *b* ist positiv für eine Verzögerung der Außenbahn), und des Strec
kenzuwachses *2s* auf der Außenbahn.

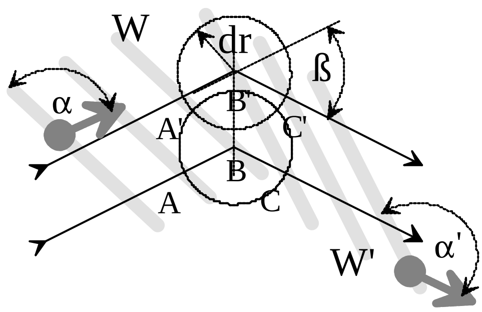
$b' = b + 2s$

Eingesetzt in die Gleichung der linken Seite folgt

$\cot\alpha' = \frac{b'}{a} = \frac{b}{a} + \frac{2s}{a}$

eine Beziehung zwischen dem Knickwinkel β und den Frontrichtungen α, α' zur Normalen der Leitbahnen.

$$\boxed{\cot\alpha' = \cot\alpha + 2\tan\frac{\beta}{2}}$$



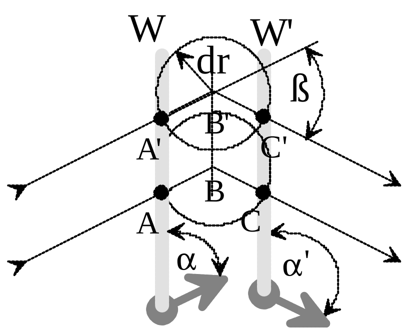
Den Sonderfall links- und rechtsseitig gleicher Frontwinkel $a = a'$ erfüllen die Knickwinkel $b = 0$, π, 2π, ...

Sonderfall unveränderter Frontrichtung

Der Winkel α erscheint gespiegelt auf der anderen Seite, wenn die Wellenfront der Knickfront folgt, $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}$; $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$, was durch Einsetzen in die Knickgleichung leicht überprüft werden kann.

Vor der Knickstelle stehe die Wellenfront im Winkel *a* zur Leitbahn. Vorausgesetzt, die Ausbreitungsgeschwindigkeit bleibt unverändert, werden in gleichen Zeiten gleiche Wege *dr* zurückgelegt. Der Weg von *A* über *B* nach *C* ist gleichweit dem Weg *A', B', C'.*

Sind die Leitbahnen parallel zueinander, bleiben zwangsläufig die Wellenfronten *W, W'* ebenfalls parallel. Nach Passieren des Hindernisses steht die Wellenfront nur für diesen Fall im Winkel von $\alpha' = \alpha + \beta$ zur neuen Leitbahnrichtung, wenn *ß* den Knickwinkel der Leitbahnen darstellt.

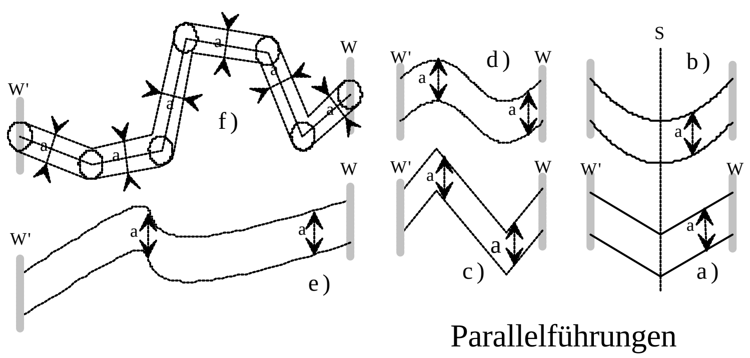


Wie bei der Krümmung kann die Richtungsänderung der Wellenfront *W, W'* zur Ermittlung der Biegung eines Gelenks herangezogen werden, Biegung und Knickung sind analoge Erscheinungen.

Wenn ein Generator Impulse (Rauschen) in zwei in der Drehebene liegende Leitbahnen einspeist, bleiben die Wellenfronten in ihrer Lage relativ zur Impulsquelle unverändert. Folglich repräsentiert ihre Ausrichtung nach Passieren des Gelenks die Stellung des Gelenks selbst, ihr Winkel zur Leitbahnrichtung ändert sich proportional zur Stellung des Gelenks.

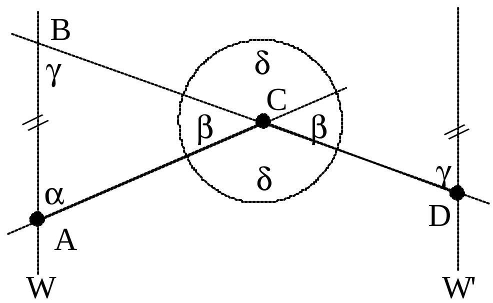
Parallelführungen

Die Länge von Leitbahnen ändert sich nicht, wenn sie in der Ebene einer einkommenden Wellenfront *W* parallel verschoben werden. Die auf der anderen Seite entstehende Wellenfront *W'*, Leitbahnen gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit vorausgesetzt, wird parallel zur ursprünglichen Frontrichtung orientiert sein. Dabei befinden sich die so konstruierten Leitbahnen *an jeder Stelle im gleichen Abstand a* zueinander (siehe Bilder a bis e).



Parallelführungen

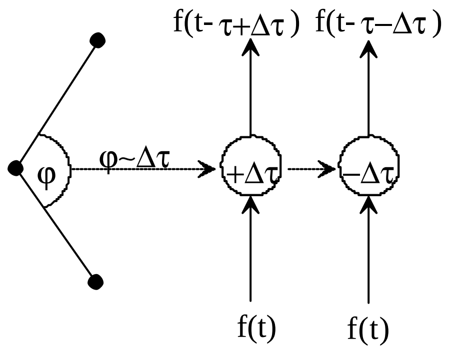
Bei einer praktisch realisierten Parallelführung (Bild f) trifft dies nicht mehr zu. Die Leitbahnen stehen in einer Abstandsbeziehung zum jeweiligen Stab, die Bedingung konstanten Abstandes zwischen den Leitbahnen *in Frontrichtung* ist folglich nur annähernd erfüllt, ein mit wachsendem Ausschlag steigender Fehler ist zu erwarten.
Dennoch bleibt, insbesondere bei kleinen Ausschlägen der Gelenke, die Frontrichtung unabhängig von der Stellung der Gelenke nahezu erhalten, wenn gesichert werden kann, daß sich Dehnungen und Streckungen in ihrer Wirkung auf die Laufzeit annähernd kompensieren.



Im technischen Modell würde man induktiv, kapazitiv, potentiometrisch oder digital- inkremental gesteuerte Verzögerungsglieder benutzen, um eine drehwinkelproportionale Verzögerungszeit zu generieren. In einer auch mehrfachen Parallelführung bleibt die Winkelsumme in Bezug auf zwei äußere Leitlinien *W, W'* unverändert, werden unterschiedliche Stellungen der Gelenke erprobt.
Für das Dreieck *A, B, C* gilt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Die Kreuzung in *C* hat eine Winkelsumme von 360°, daraus folgt $\beta + \delta = 180°$. Folglich stehen die Winkel in fester Beziehung zueinander.

$$\boxed{\alpha + \gamma = \delta}$$

Durch Fortsetzung können weitere Gelenkglieder angeschlossen werden, ohne daß diese Beziehung verloren geht. Es ist somit möglich, beliebig viele Glieder aneinanderzukoppeln.

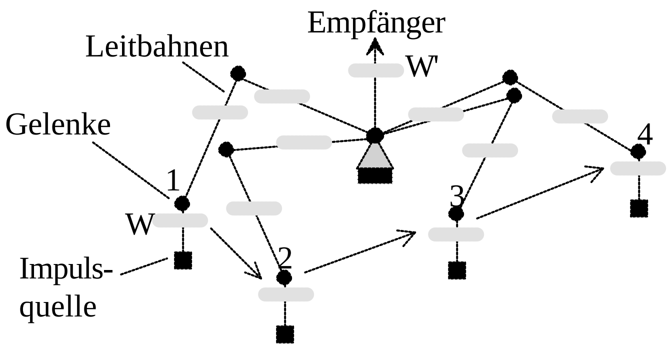


Stehen Verzögerungselemente zur Verfügung, die eine hinreichend genaue Proportionalität zwischen Winkel und Verzögerungszeit $\pm\tau \sim \varphi$ herstellen, ist es möglich, technische Parallelführungen nach diesem Prinzip zu gestalten. Liegen die Winkelwerte in digitaler Form vor (Inkrementale Winkelgeber), lassen sich hochpräzise Steuerungssysteme hoher Geschwindigkeit schaffen. Jedem Gelenk sind dann eine entsprechende Anzahl von Addierern zuzuordnen.

Gelenkstabmodelle

Wie ist es möglich, daß wir mit verbundenen Augen ein Tablett vom Fußboden auf den Tisch stellen können, ohne notwendigerweise den Inhalt der Gläser zu vergießen? Wie realisiert unser Körper die Berechnungen zur Einstellung der Gelenke dieser Parallelführung, für die derzeitige Industrieroboter Rechenleistung im Bereich von MFlops (Mega Floating Point Operations per Second) beanspruchen?

Wie ist es möglich, ein Skelett- Gerüst im Stehen oder Laufen auszubalancieren? Unter der Annahme, daß sich jedes Skeletteil anhand der benachbarten orientiert, entstünde eine Regelstrecke, die aus einer Kettenschaltung von mehreren Dutzend Regelkreisen bestünde. Es wäre ein nutzloses Unterfangen, zu versuchen, diesem Regelsystem Stabilität verleihen zu wollen. Es würde mit Sicherheit schwingen.



Wie oben gezeigt, lassen sich Gelenke konstruieren, bei deren Passieren eine von einer Impulsquelle erzeugte Wellenfront *W* eine hinreichend geringe Richtungsveränderung in Bezug auf ihre Ausgangslage erfährt. Passiert die Wellenfront danach weitere Gelenke, bleibt ihre Richtung unabhängig von der Stellung der Gelenke nahezu erhalten. .Folglich können wir mit geschlossenen Augen unsere Hand parallel zu einer Ebene führen, zB. zu den Stellungen *1, 2, 3, 4*, wenn das zentrale Nervensystem Veränderungen einer Impulsfront kontrollieren kann. Es muß lediglich die

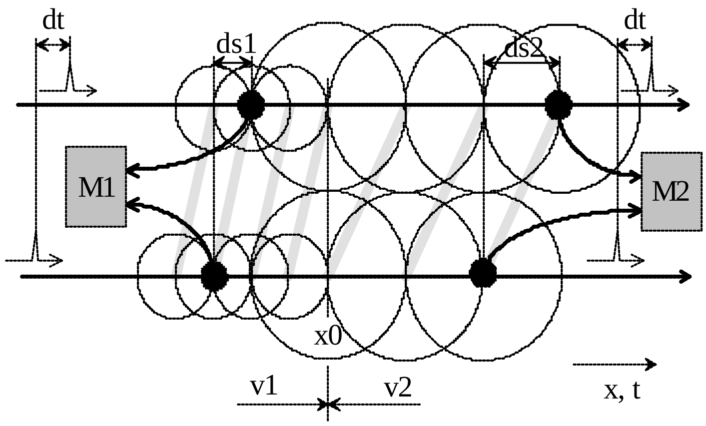
Handstellung entsprechend nachregeln, mit dem Ziel, die oben ankommende Frontrichtung zu erhalten. Begünstigend wirkt die Schaffung einer definierten Erregung in der Handfläche als Impulsgenerator, zB. durch bewußte Anspannung der Muskeln der Hand (Ballet), oder durch Aufnehmen eines Gegenstands (Hautsensibilität).

Ein Versuch kann die Irritation bei der Registrierung falscher Interferenzbilder modellieren: Schreibt man ohne visuelle Kontrolle in bequemer, entspannter Haltung den Namen sauber in verschiedenen Beugestellungen des Ellenbogens und des Schultergelenks auf ein Blatt Papier, kann man Unterschiede feststellen.

Wellenausbreitung an Grenzflächen

Die Bezeichnung 'Grenzfläche' entstammt dem Sprachgebrauch der Optik. In neuronalen Systemen sind Grenzflächen nur bedingt erkennbar. Als Grenzfläche wird die Fläche bezeichnet, die Leitbahnabschnitte einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von denen einer anderen Ausbreitungsgeschwindigkeit abgrenzt. In Analogie zur Optik entsteht an diesen Grenzflächen eine Brechung der Impulsfronten.

Senkrechte Brechung

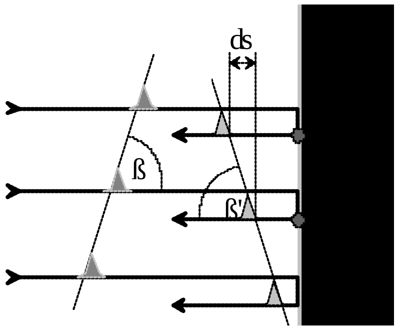


Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten *dx/dt* zweier parallel führender Leitbahnen mögen sich aprupt an der Stelle x_0 von v_1 auf v_2 ändern. Dann ändern die gedachten Wellenfronten (Bild) ihren Einfallswinkel entsprechend. Multiplikative Empfänger *M1* und *M2*, die die Aufgabe haben, die einfallende Wellenfront zu signalisieren, müssen links von x_0 um $ds_1 = v_1\ dt$, rechts von x_0 um $ds_2 = v_2\ dt$ versetzte Eingänge in Ausbreitungsrichtung der Wellenfront besitzen, wenn *dt* die zu selektierende Pulsinterferenz darstellt. Der im Bild dargestellte Verlauf der Wellenfront stellt die zeitliche Ausbreitung derselben dar.

Im Bild steigt die Ausbreitungsgeschwindigkeit an der Brechungsstelle x_0. Entsprechend größere Radien können in gleichen Zeiten durchlaufen werden. Die Zeitdifferenz *dt* ist vor und hinter der Stelle x_0 identisch.

Senkrechte Reflexion

Eine Gruppe von Impulsen auf parallelen Leitungen wird an einem Hindernis reflektiert. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit v möge konstant bleiben. Die Impulse werden vom Hindernis ohne Beeinflußung ihrer Lage zueinander und ohne Verzögerung reflektiert. Dann ist der Winkel der Wellenfront in Einfallsrichtung *ß* betragsgleich dem der Ausfallsrichtung *ß'*,
ß = -ß'.



Der zeitliche Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Impulsen dt ist mit dem örtlichen Differenzabstand der Impulse ds vernüpft,
$ds = v\ dt$.
Proportionalitätskonstante ist wiederum die Ausbreitungsgeschwindigkeit v. Die Normale der Wellenfront, die Leitbahnrichtung und die Wellenfront selbst stehen im Winkel *ß = ß'* aufeinander,

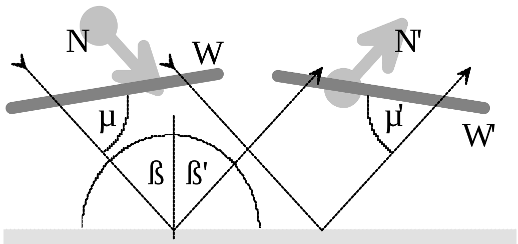
$$\boxed{\tan ß = \tan ß' = \frac{dl}{ds}}$$

wenn sämtliche Leitbahnen senkrecht an der Reflexionsfläche gespiegelt werden.

Symmetrische (optische) Reflexion

Alle nicht leitungsgebundenen Wellenausbreitungen betrachten wir so, als ob die Wellenfront stets die Normalenrichtung der Wellenausbreitung vorgibt. Elektrische Leitbahnen aber sind voneinander isoliert. Die Ausrichtung der Wellenfront und die Normalenrichtung der Wellenausbreitung sind bei elektrischen Netzwerken völlig voneinander unabhängige Dinge. Während die Wellenfront von der zeitlichen Staffelung der Impulse vorgegeben wird, ist die Normalenrichtung der Wellenausbreitung zwangsläufig die des Leitbahnverlaufes! Mithin steht die Wellennormale nicht mehr zwangsläufig senkrecht auf der Wellenfront.

Eine Orthogonalitätsbeziehung zwischen Ausbreitungsrichtung und Wellenoberfläche existiert bei elektrischen Netzwerken nicht. Der Winkel µ zwischen der Ausbreitungsrichtung N (Leitbahnrichtung) der Welle und der Wellenfront W ist beliebig wählbar. Eine Wellenfront W im Winkel μ zur Normalenrichtung N der Wellenausbreitung wird an einem Hindernis reflektiert. Die Normalenrichtung der Wellenausbreitung N ist identisch dem Verlauf paralleler Leitbahnen L. Dann läßt sich über die Kongruenz zweier Dreiecke, die zwischen der Wellenfront W bzw. W', dem Hindernis und der Leitbahnrichtung L bzw. L' aufgespannt werden, zeigen, daß folgender Sachverhalt gilt.



Svmmetrische Reflexion

Stehen ankommende und abgehende Leitbahn L, L' jeweils im Winkel ß = ß' zur Normalen der Reflexionsfläche, so ist der Winkel der ankommenden Wellenfront (µ + ß) identisch dem Winkel der abgehenden Wellenfront (µ' + ß') .

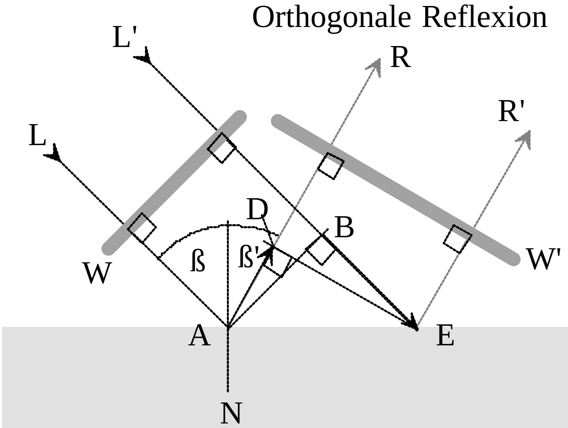
$$\boxed{\mu+\beta=\mu'+\beta}$$

Kommende und gehende Wellenfront werden symmetrisch zueinander gespiegelt.
Außer der symmetrischen Reflexion paralleler Leitbahnen existiert der allgemeinere Fall der Reflexion an einer beliebig zu kommender und gehender Leitbahn stehenden Fläche, der bei allen bisher bekannten Wellenmedien nicht relevant ist.

Orthogonale Reflexion und orthogonale Brechung

Es besteht die Aufgabe, eine orthogonal ankommende Wellenfront orthogonal (Wellenfront steht senkrecht zur Ausbreitungsrichtung) zu reflektieren, wobei die Winkel für die Leitbahnen von Einfallsrichtung *ß* und Reflexionsrichtung *ß'* verschieden voneinander sind. Zu bestimmen ist das Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeiten zwischen v_{in} der Leitbahnen *L, L'* sowie v_{out} der Leitbahnen R, R'. Da bei dieser Art der Reflexion die Ausbreitungsgeschwindigkeit variiert wird, wäre die Bezeichnung 'reflektive Brechung' der gewählten gleichwertig.

Orthogonale Reflexion



Wie im Bild dargestellt ist, sind Einfalls- und Reflexionswinkel Winkelfunktionen der Streckenabschnitte *AD*, *BE* und *AE*. Die Streckenabschnitte *BE* und *AD* entsprechen den Laufzeitdifferenzen des kommenden und des reflektierten Strahls. Es ist abzulesen:

$$\sin ß = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}$$

$$\sin ß' = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$$

Die Strecken *AD* und *BE* sind als Produkt aus Geschwindigkeit und Zeit zu verstehen.

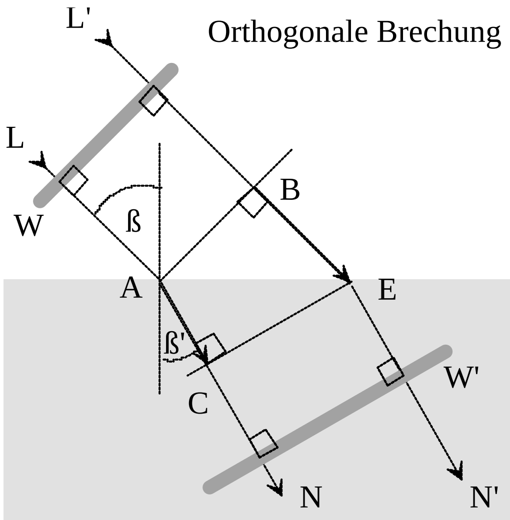
$$\overline{BE} = v_{in}\ t$$

$\overline{AD} = v_{out}\ t$

Ineinander eingesetzt folgt eine Gleichung zur Ermittlung der Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeiten vom Verhältnis der Winkel des einfallenden und des abgehenden Strahls.

$$\boxed{\frac{v_{in}}{v_{out}} = \frac{\sin ß}{\sin ß'} = n}$$

Das ist dieselbe Gleichung, die 1621 von *Snellius* bei Experimenten mit Lichtstrahlen entdeckt wurde, und die als Brechungsgesetz (nicht als Reflexionsgesetz!!!) in die Analen der Optik einging. Das Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeiten *n* wird als (relative) Brechzahl bezeichnet. Durch Variation der Ausbreitungsgeschwindigkeit ist es folglich möglich, eine orthogonale Wellenfront unsymmetrisch zu spiegeln. Dieser Effekt müßte von anisotropen Kristallen bekannt sein.



Gleichlautend gilt dieses Gesetz für die orthogonale Brechung (siehe Bild), die orthogonale Brechung ist der optischen Brechung eng verwandt.

Die Snellius'sche Formel ist folglich dann anwendbar, wenn ein Leitbahnbündel gekrümmt werden soll, dabei aber die Orthogonalität zwischen Wellennormale und Wellenfront nicht verloren gehen darf.

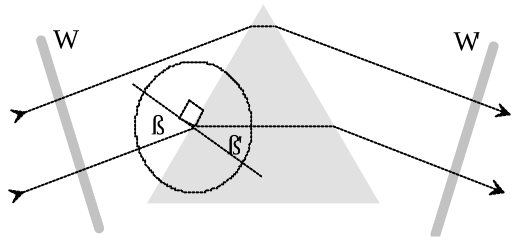
Prismatische, orthogonale Brechung

Das zugrunde liegende Prinzip ist aus der Optik bekannt. Die Struktur (Bild) knickt eine ankommende Wellenfront im Winkel *2(ß-ß')* . Ankommende und reflektierte Wellenfront stehen auf der Leitbahnrichtung senkrecht.

Für die Ermittlung von *ß* und *ß'* gilt jeweilsdie Snellius'sche Formel $(\mu = 0)$.

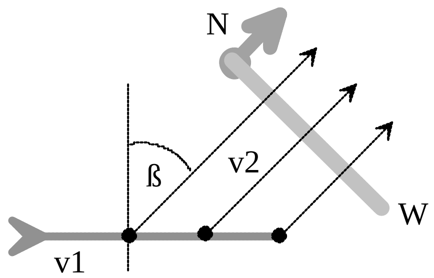
$$\boxed{\frac{v_{in}}{v_{out}} = \frac{\sin ß}{\sin ß'} = n}$$

Da bei dieser Art der Beugung die Orthogonalität zwischen Wellenfront und Wellennormale erhalten bleibt, wäre die Bezeichnung 'optische Brechung' der gewählten gleichwertig. In der Optik werden Prismen häufig benutzt, um verschiedene Frequenzen, denen i.a. verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeiten zuzuordnen sind, zu trennen.Da hier aber das Augenmerk auf impulsförmige Signale konstanter Impulslänge gerichtet ist, die i.a. alle von einer Quelle (dem jeweils letzten Neuron) stammen, ist dieser Nebeneffekt nicht interessant, durch eine prismatische Leitbahnstruktur hindurch wird mit gleichartigen Impulsen ohne Dispersionsfehler abgebildet.



Totalreflexion

Wenn ein Strahlenbündel aus einem dichteren Medium (niedrige Ausbreitungsgeschwindigkeit) kommend in ein dünneres Medium (höhere Ausbreitungsgeschwindigkeit) einfällt, und der dabei zu beobachtende Beugungswinkel zu 90° wird, zeigt die Wellennormale in Richtung der Trennfläche zwischen dichtem und dünnem Medium. Die Konstellation wird in der Optik als Totalreflexion bezeichnet. In elektrischen Netzwerken ist der Begriff 'Totalreflexion' inhaltlich wenig zutreffend. Die Impulse auf den einzelnen Leitungen können sich in anisotropen Netzwerken ungestört voneinander ausbreiten, auch in 90° Richtung. Reflektiert wird nichts, jeder Einzelimpuls kann sich nur in die von der Leitbahn vorgeschriebene Bahn begeben.



Nutzbar ist die Anordnung (Bild) zur (rückwärts-) Bündelung der Energie einer Wellenfront, oder zur Erzeugung einer Wellenfront aus dem Signal einer einzigen Quelle (zB. des neuronalen Axons). Sie gibt die Möglichkeit, aus einer Leitbahn ein Bündel von Impulsen auszukoppeln, dessen Wellenfront orthogonal zur Leitungsrichtung (Normalenrichtung) steht. In der Snellius'schen Formel wird *ß'* zu 90°.

$$\boxed{n = \frac{v_2}{v_1} = \sin ß}$$

Das Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeiten bestimmt den Sinus des Brechungswinkels *ß*. Die Geschwindigkeit der Einzelleitung v_1 muß in jedem Fall höher sein, als die der ausgefächerten Seite v_2.

Freie Reflexion

Was zunächst aussieht wie ein Fehler, ist im zwangsgeführten Medium 'neuronales Netzwerk' der Standardfall: Eine Wellenfront *W'* steht auf ihrer Wellennormalen *R, R'* nicht notwendig senkrecht. Die Wellennormale *muß* in Richtung der willkürlich verlegten Leitbahn verlaufen, die Wellenfront hingegen richtet sich objektiv nach dem Vorankommen des Einzelimpulses.

Wie ändert sich der Einfallswinkel μ einer Wellenfront *W* , wenn kommende und gehende Leitbahnen verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeiten v_{in} , v_{out} besitzen, und wenn der Winkel der Einfallsrichtung *ß* beliebig verschieden vom Winkel der Reflexionsrichtung *ß'* sein kann?

Wenn die Leitbahnrichtung (die Richtung der Wellen'normalen') vorgebbar ist, ebenso die Lage der Reflexionsfläche, muß die Wellenfront zwangsläufig beliebige Winkel zur Wellenausbreitungsrichtung annehmen können. Die durchlaufenen Strecken verhalten sich wie die Produkte aus lokaler Geschwindigkeit v und Zeit t. Die Strecken BE und AF sind gleich lang. Die Signalausbreitung entlang der Strecken BE und AF ist gleichgroß in gleichen Zeiten.

$BE = AF = v_1 \, t$

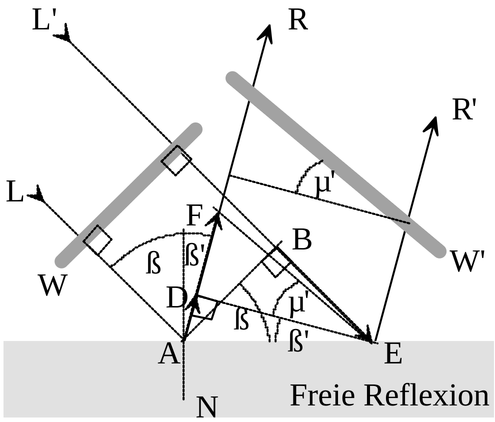
Um zunächst den Winkel für eine orthogonale Reflexion bestimmen zu können, darf die von A reflektierte Welle innerhalb der Laufzeit um BE nur um die Strecke AD vorankommen. Dann entsteht zunächst wieder die Snellius- Gleichung.

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AD}} = \frac{\sin ß}{\sin ß'}$$

Wird mit gleichen Geschwindigkeiten gearbeitet, sind die Strecken BE und AF gleich lang. Im allgemeinen Fall aber können für kommende und gehende Leitbahnen verschiedene Geschwindigkeiten v_{in} , v_{out} gewählt werden. (Man erweitere die linke Seite mit t/t , um die Herleitung zu erkennen). n ist wiederum die Brechzahl.

$$\frac{v_{in}}{v_{out}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AF}} = n$$

Umgestellt nach BE und in obige Gleichung eingesetzt folgt:



$$\frac{n \, \overline{AF}}{\overline{AD}} = \frac{\sin ß}{\sin ß'}$$

Die Strecke AF ist aus den Strecken AD und DF zusammengesetzt.

$$\overline{DF} = \overline{AF} - \overline{AD}$$

Für AF kann die oben ermittelte Funktion eingesetzt werden. AD wird ausgeklammert.

$$\overline{DF} = \overline{AD} \left(\frac{1}{n} \frac{\sin ß}{\sin ß'} - 1 \right)$$

Nun sind die Dreiecke ADE und DFE zu vergleichen. Die Winkel $ß'$ und μ' können über den Tangens bestimmt werden.

$$\tan ß' = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}$$

$$\tan \mu' = \frac{\overline{DF}}{\overline{DE}}$$

Beide Gleichungen werden durcheinander dividiert. Für DF/AD wird der oben ermittelte Ausdruck eingesetzt. Es folgt eine allgemeingültige Gleichung zur Bestimmung der Gegebenheiten einer Reflexion bzw. Brechung.

$$\boxed{\frac{\tan \mu'}{\tan ß'} = \frac{1}{n} \frac{\sin ß}{\sin ß'} - 1}$$

Hierin bedeuten: *ß* den Winkel zwischen ankommender Leitbahn und Normaler der Reflexions/Brechungsfläche; *ß'* den Winkel zwischen abgehender Leitbahn und Normaler der Reflexions/Brechungsfläche; *n* die Brechzahl; und μ' den Winkel, um den die gehende Wellenfront von der Senkrechten zur entsprechenden Leitbahn abweicht.

Für den Sonderfall, daß die gehende Wellenfront orthogonal ausgerichtet sein soll, bzw. sie eine vergleichbare, relative Frontschräge besitzen soll wie die ankommende Front, wäre $\mu' = 0$ einzusetzen, $tan(0) = 0$. Beiderseitige Eins- Addition und Multiplikation mit *n* liefert dann das Snellius'sche Gesetz als Sonderfall dieser Gleichung. Sie gilt für Brechung, nichtbrechende und brechende Reflexion gleichermaßen.

$$\boxed{n = \frac{\sin ß}{\sin ß'}}$$ *Snellius'sches Gesetz*

Für n = 1 (keine Brechzahländerung) folgt daraus ß = ß' (Reflektionsgesetz).

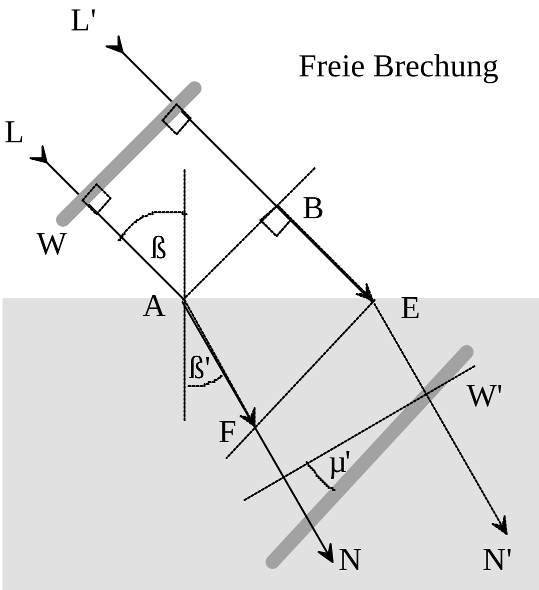
Freie Brechung

Im Fall der Brechung sind die Ausbreitungsgeschwindigkeiten in den Medien a priori verschieden. Die Strecke

$\overline{AF} = v_{out}\ t$

ist verschieden von der Strecke

$\overline{BE} = v_{in}\ t$



Der Brechungswinkel kann durch entsprechende Führung der abgehenden Leitbahnen beliebig vorgegeben werden.

Es gilt ebenso die im vorhergehenden Kapitel vollzogene Herleitung.

$$\boxed{\frac{\tan \mu'}{\tan ß'} = \frac{1}{n}\ \frac{\sin ß}{\sin ß'}\ - 1}$$

Als Brechzahl *n* wird eingeführt:

$\frac{v_{in}}{v_{out}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AF}} = n$

Es bedeuten: *ß* den Winkel zwischen ankommender Leitbahn und Normaler der

Reflexions/Brechungsfläche; *ß'* den Winkel zwischen abgehender Leitbahn und Normaler der Reflexions/Brechungsfläche; *n* die Brechzahl; und μ' den Winkel, um den die gehende Wellenfront von der Senkrechten zur entsprechenden Leitbahn abweicht.

Für den Sonderfall, daß die gehende Wellenfront orthogonal ausgerichtet sein soll, bzw. sie eine vergleichbare, relative Frontschräge besitzen soll wie die ankommende Front, wäre $\mu' = 0$ einzusetzen. Beiderseitige Eins- Addition und Multiplikation mit *n* liefert dann das Snellius'sche Gesetz als Sonderfall dieser Gleichung. Sie gilt für Brechung und brechende Reflexion gleichermaßen.

$$\boxed{n = \frac{\sin ß}{\sin ß'}}$$ *Snellius'sches Gesetz*

Für n = 1 (keine Brechzahländerung) folgt daraus *ß* = *ß*'.