

*Derselbe Impuls kann niemals gleichzeitig
an verschiedenen Orten sein,
wie schnell er sich auch bewegen mag.
G. Heinz, 1993*

Zeitfunktionen

Im Unterschied zu mathematischen Beschreibungsmethoden zur Beschreibung sequentiell wirkender Schaltungen liegt der Schwerpunkt des folgenden Abschnitts auf der Betonung 'Interferenz', da im Interferenz-Ansatz ein generell brauchbarer Ansatz für Formen selbstorganisierter, natürlicher neuronaler Netze zu sehen ist. Es können ortsgebundene Interferenzsituationen geschaffen werden, denen eine einfache Übersetzung in selbstlernende Netzwerke zugebilligt werden kann. Der aus der Technik geläufigere Begriff 'sequentielle Schaltungen' erscheint fehlbetont, und wird unter Betonung von Interferenzsituationen zwischen verschiedenen, miteinander korrelierenden Impulsen ausgetauscht gegen 'Fremdinterferenz'.

Zur Erörterung frequenzselektiver Merkmalsextraktionen sind Überlegungen zu einer für mathematische Zwecke brauchbaren Darstellung von Impulsvorgängen der betrachteten, biologienahen Art vonnöten.

Reproduzierbarkeit

Wenn eine Impulsform benötigt wird, an die die Forderung nach Reproduzierbarkeit der Impulsform $f(x)^n = f(x)$ gestellt wird, die also unabhängig von der Zahl (multiplikativer) Interferenzfaktoren ist, kommt dem Rechteckimpuls besondere Bedeutung zu. Reproduzierbarkeit bei multiplikativem Empfang heißt, daß die Impulsfunktion $f(x)$ die Bedingung unabhängig von n erfüllen soll. Reduzieren wir diese Aufgabe darauf, nach reellwertigen Lösungen für eine Zahl y zu suchen, für die $y^n = y$ gilt, so existieren nur die Lösungen $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Daraus folgt, daß es außer der idealen Rechteckfunktion im Reellen keine weitere gibt, die reproduzierbar in Potenzen der Funktion selbst ist. Selbst eine dreiwertige Rechteckform mit -1 als Negativwert reduziert mögliche Lösungen für n , wirkt nicht formreproduzierend, die quadrierte Funktion besitzt die doppelte Frequenz

Rechteck- Impulsdarstellung

Fourier- Zerlegung periodischer Signale

Nach Fourier kann eine periodische Funktion mit der Grundfrequenz $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ in eine Reihe von Sinus- und Kosinusschwingungen zerlegt werden (orthogonales System von Funktionen)

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

mit den Fourier- Koeffizienten

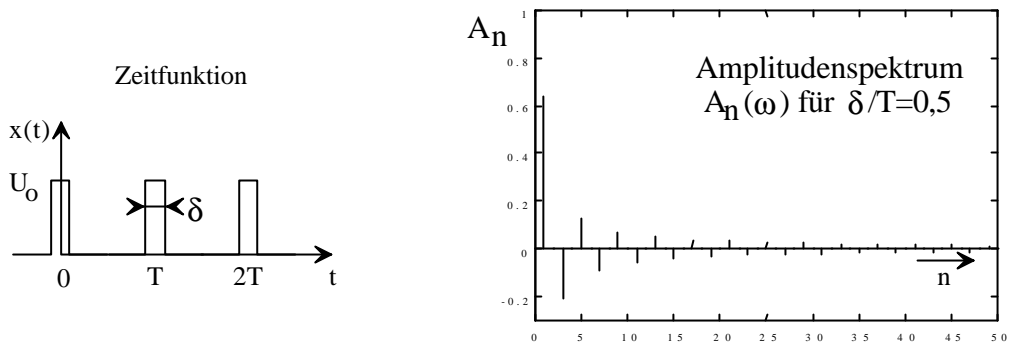
$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos n\omega t dt, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin n\omega t dt$$

Der Fourierkoeffizient für $n=0$ repräsentiert den doppelten Wert des Gleichanteils (Mittelwert) des

Signals.

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt$$

Auf einen Rechteckimpuls der dargestellten Form (gerade Glieder, $B_n=0$) angewandt, entsteht die Fourierreihe



$$A_n = \frac{2a}{n\pi} \sin(n\pi \frac{\delta}{T}), \quad A_0 = 2a \frac{\delta}{T}, \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

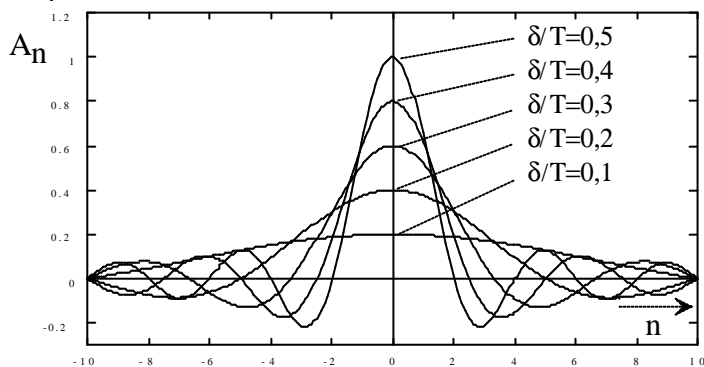
Nach Umformung und mit Einführung der sog. Spaltfunktion $si(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ folgt

$$A_n = 2a \frac{\delta}{T} si(n\omega \frac{\delta}{2}), \quad \frac{A_0}{T} = a \frac{\delta}{T}$$

$$x(t) = a \frac{\delta}{T} \left| 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} si(n\omega \frac{\delta}{2}) \cos(n\omega t) \right| \quad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Amplitudenspektren

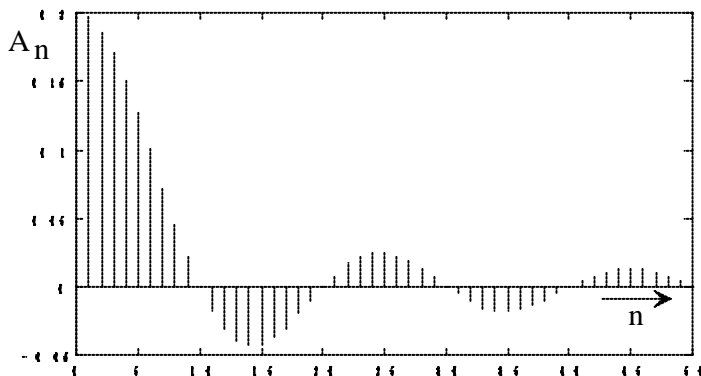
Hüllkurven für
variierende Impuls-
breiten δ/T



Es ist zu beachten, daß das nichtkomplexe Amplitudenspektrum nur einseitig definiert ist $n = \{1 \dots \infty\}$. Die im Bild gewählte, symmetrische Darstellung der Hüllkurven zur Veranschaulichung der Spaltfunktion ist nur in der komplexen (frequenz-kontinuierlichen) Form als Fourierintegral erklärt.

Fourierreihe:

Amplitudenspektrum
 A_n für $\delta/T=0,1$



Nullstellen

Je kleiner das Verhältnis von Impulsbreite δ zu Periodendauer T wird, umso mehr Harmonische fallen in die Bereiche zwischen die Nullstellen. Die Sinusfunktion wird an k -Vielfachen von π zu Null.

$$A_n = \frac{2a}{n\pi} \sin(n\pi \frac{\delta}{T}) = 0 : \quad n\pi \frac{\delta}{T} = k\pi$$

Folglich sind alle Harmonischen $n = k \frac{T}{\delta}$ Nullstellen der Funktion.

Grenzwert für $d/T \rightarrow 0$

Für einen unendlich schmalen Impuls (Dirac) ergibt sich ein konstantes Spektrum, es gilt der Grenzwert für alle A_n

$$A_n = \lim_{\delta \rightarrow 0} 2a \frac{\delta}{T} \operatorname{si}(n\omega \frac{\delta}{2}) = 2a \frac{\delta}{T}$$

gleichzeitig wandert die erste Nullstelle der Funktion ins Unendliche.

Komplexe Fourier-Darstellung

Komplexe Fourier-Koeffizienten besitzen den Vorzug, daß sie zusätzlich eine Information über die Phasenlage des Signals tragen. Mit dem Satz von Euler gilt

$$\sin(n\omega t) = \frac{1}{2i} (e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}), \quad \cos(n\omega t) = \frac{1}{2} (e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t})$$

Die Fourier-Koeffizienten folgen zu

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \frac{1}{2} (e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \frac{1}{2i} (e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}) dt$$

Eingesetzt in die Zeitfunktion und gliedweise summiert ergibt die komplexe Fourier-Reihe (mit veränderten Summationsgrenzen) in der Form

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(jn\omega) e^{jn\omega t}$$

und den komplexen Fourier-Koeffizienten

$$X(jn\omega) = \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-jn\omega t} dt$$

Im Gegensatz zur nichtkomplexen Darstellung (Linienspektrum) ist dieses Spektrum für positive und negative Frequenzen $jn\omega$ definiert. Zur Bildung des (einseitigen) Amplitudenspektrums werden positive und negative Anteile summiert.

$$A_n = \frac{2}{T} |X(jn\omega)|$$

Angewandt auf die bereits diskutierte Folge von Rechteckimpulsen folgt das komplexe Amplitudenspektrum⁷²¹ zu

$$X(jn\omega) = a \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} e^{-jn\omega t} dt = \frac{ja}{n\omega} (e^{-jn\omega \frac{\delta}{2}} - e^{+jn\omega \frac{\delta}{2}}) = 2a \frac{1}{n\omega} \left(\sin n\omega \frac{\delta}{2} \right)$$

Die Zeitfunktion kann folglich adäquat in der Form

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(jn\omega) e^{jn\omega t}$$

dargestellt werden.

⁷²¹ Woschni, E.-G.: Informationstechnik. Verlag Technik Berlin, 4. Auflage, 1990

Einzelimpuls

Spektrum eines Einzelimpulses

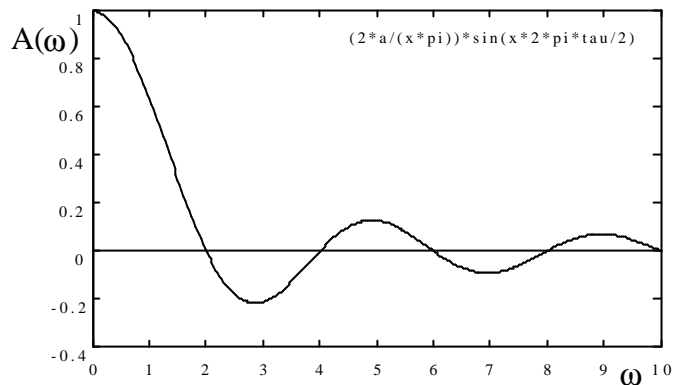
Ein Einzelimpuls besitzt das komplexe Amplitudenspektrum

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\delta/2} 0 e^{-j\omega t} dt + a \int_{-\delta/2}^{\delta/2} e^{-j\omega t} dt + \int_{-\delta/2}^{+\infty} 0 e^{-j\omega t} dt = a \int_{-\delta/2}^{\delta/2} e^{-j\omega t} dt = -\frac{a}{j\omega} \left(e^{-j\omega t} \right) \Big|_{-\delta/2}^{+\delta/2} = \frac{2a}{\omega} \operatorname{si}(\omega \frac{\delta}{2})$$

$$X(j\omega) = a\delta \operatorname{si}(\omega \frac{\delta}{2})$$

Dieses Spektrum unterscheidet sich von dem der Impulsfolge dadurch, daß die diskontinuierliche Verteilung des Spektrums $n\omega$ ($\omega \in 2\pi f$ stellt die Kreisfrequenz dar) in eine kontinuierliche übergeht. Hüllkurve von Einzelimpuls und Impulsfolge sind hingegen identisch.

Rechteck-Einzelimpuls
Amplitudenspektrum
 $A(\omega)$ für $a=1, \delta=0,5$



Verschiebung um x

Durch geeignete Zerlegung des Integrationsweges kann gezeigt werden, daß sich Verschiebungen eines Einzelimpulses um den Wert ξ entlang der x - Achse in einer Multiplikation des komplexen Spektrums mit dem Verschiebeoperator $e^{-j\omega\xi}$ äußern. Für eine Verschiebung um $\delta/2$ gilt zB. (siehe obige Herleitung für Details)

$$X(j\omega) = a \int_0^{\delta} e^{-j\omega t} dt = -\frac{a}{j\omega} \left(e^{-j\omega t} \right) \Big|_{-0}^{+\delta} = -\frac{a}{j\omega} (1 - e^{-j\omega t}) = a\delta \operatorname{si}(\omega \frac{\delta}{2}) e^{-j\omega \xi}$$

Analog gilt für eine Verschiebung um einen beliebigen Wert ξ mit der Spaltfunktion $\operatorname{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$:

$$X_{\xi}(j\omega) = \frac{2a}{\omega} \sin(\omega \frac{\delta}{2}) e^{-j\omega\xi} = a\delta \operatorname{si}(\omega \frac{\delta}{2}) e^{-j\omega\xi}$$

Glocken- Impulsdarstellung

Gauß- Impuls

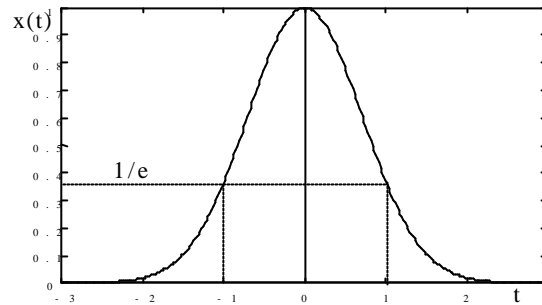
Die einfachste Impulsform, die in gewisser Weise noch analytische Eigenschaften besitzt, ist der nichtnormierte Gauß- Impuls.

$$\delta(x) = e^{-x^2} \text{ zB. mit } x = \left\{ \begin{array}{ll} f(t - t_0), & t \in R, \text{ kontinuierlich} \\ fT(n - n_0), & n \in N, \text{ zeitdiskret} \end{array} \right\}$$

Die Impulsbreite wird über den Faktor f (Frequenz) bestimmt, Bezugszeitpunkt ist t_0 bzw. n_0 .

Gauß- Impuls

$$x(t) = e^{-t^2}$$



Eigenschaften

Die Funktion ist durch eine Reihenentwicklung

$$e^{-x^2} = \left| 1 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{12}}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} \right| - \left| t^2 + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{14}}{7!} + \dots + \frac{x^{2l}}{l!} \right|$$

in steigende und fallende Funktionsteile zerlegbar. Die Reihenentwicklung ist verwandt mit den Funktionen $e^x = \cosh x + \sinh x$, $e^{-x} = \cosh x - \sinh x$.

Eine Zerlegung der Funktion kann die numerische Berechnung im Falle diskreter Stützstellen beschleunigen. Statt einer Reihenentwicklung ist für jedes weitere x eine weitere Multiplikation auszuführen.

$$e^{-x^2} = (e^{-x})^x$$

$$e^{-x^2} = \prod_x (e^{-x}), \quad x \in N$$

Parameter

In den Parametern einstellbar (Höhe b , Weite a) ist die Funktion in der Form

$$y = be^{-(ax)^2}$$

Sie hat symmetrische Wendepunkte bei

$$(x, y) = \left(\frac{\pm 1}{a\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{e}} \right)$$

und Steigungen in den Wendepunkten von

$$\tan \beta = \pm ab \sqrt{\frac{2}{e}}$$

In der Statistik wird die Gaußsche Glockenkurve mit den Parametern

$$a = \sigma \sqrt{2}, \quad b = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

als Normalverteilung benutzt.

Spektrum

Für einen Gauß- Impuls in der Form

$$x(t) = ae^{-b^2 t^2}$$

wird das komplexe Fourierspektrum durch

$$X(j\omega) = a \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-b^2 t^2} e^{-j\omega t} dt = a e^{-\omega^2/4b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(bt+j\omega/2b)^2} dt$$

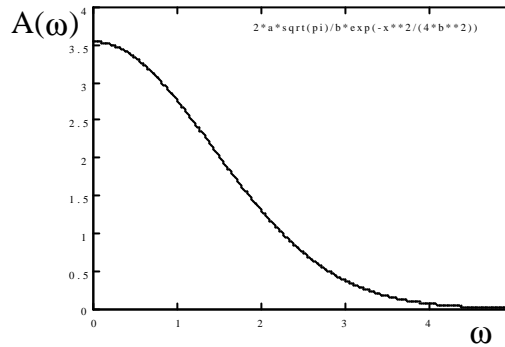
$$X(j\omega) = \frac{2a}{b} e^{-\omega^2/4b^2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{a\sqrt{\pi}}{b} e^{-\omega^2/4b^2}$$

und die Amplitudendichte durch

$$A(\omega) = 2|X(j\omega)|$$

als kontinuierliches Spektrum beschrieben. Der Amplitudengang hat die Form einer Gauß- Glocke, das Spektrum klingt zu hohen Frequenzen hin monoton fallend ohne Nebenmaxima ab.

Gauß- Impuls
Amplitudenspektrum
 $A(\omega)$ für $a=b=1$



Gauß- Impulsfolge

Werden mehrere Gauß- Impulse $\delta(t) = e^{-(t-t_i)^2}$ unterschiedlicher Bezugszeit t_i addiert, entsteht die Impulsfolge $f(t)$.

$$f(t) = \delta(t - t_1) + \delta(t - t_2) + \dots + \delta(t - t_n)$$

Für Periodizität kann sie als Summenfolge angegeben werden.

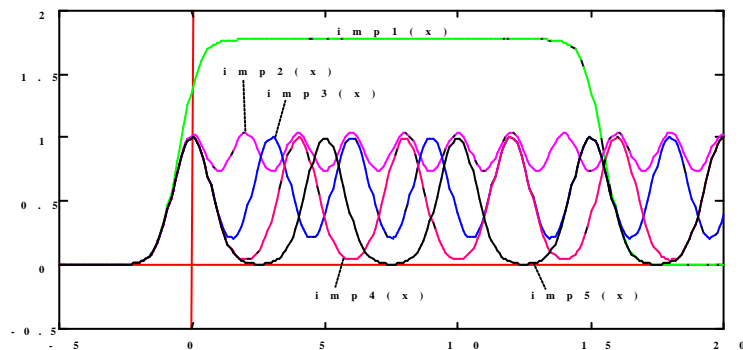
$$f(t) = \sum_{i=1}^n \delta(t - t_i) = \sum_{i=1}^n \delta(t - \tau i)$$

Werden Feuerfrequenz f und Bezugszeit t_0 als Parameter eingeführt, folgt

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \delta(t - t_i) = \sum_{i=1}^n \delta(f(t - \tau i) - t_0)$$

Das Bild zeigt verschiedene Impulsfolgen. Als Parameter wurde $\tau = \{1,2,3,4,5\}$ variiert. Es ist zu erkennen, daß erst ab $\tau = 5$ [imp5(x)] 'Bodenberührung' eintritt, hingegen steigt der Funktionswert bereits ab $\tau = 2$ [imp2(x)] nicht mehr wesentlich über $f(x) = 1$. Für $\tau = 1$ [imp1(x)] zeigt die Funktion selbst die Charakteristik einer Summeninterferenz ($f(x)$ steigt über Eins). Unterhalb von $\tau = 3$ [imp3(x)] wird die Einhüllende rechteckförmig. Alle dichteren Impulsfolgen summieren sich zu einem rechteckartigen Impuls. Um diesen Effekt zu demonstrieren, wurde die Folge mit $\tau = 1$ nach dem 15. Impuls beendet (Bild).

Summierte Einzelimpulse
bei dichter werdender
Impulsfolge.
Es entsteht ein Gleichrichter-
effekt. Je enger die Folge,
desto glatter der Gleichwert.



Werden die Glieder dieser Folge hintereinander geschrieben und umgeformt, läßt sich die Impulsfolge als Produkt aus Impuls und zugehörigen Verzögerungen interpretieren.

$$f(x) = e^{-x^2} \left(\frac{e^{2x}}{e^1} + \frac{e^{4x}}{e^4} + \frac{e^{6x}}{e^9} + \frac{e^{8x}}{e^{16}} + \dots + \frac{e^{nx}}{e^{n^2}} \right)$$

Laplace- Integraldarstellung

Mit Hilfe des Laplace- Integrals^{73]} kann der Frequenzgang einer Funktion $f(t)$ in Analogie ermittelt werden.

$$F_t(p) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad p = \sigma + j\omega$$

Für die Impulsfolge resultiert ein wenig anschauliches Ergebnis. In diskretisierter Form kann eine an diskrete Stützstellen gebundene Laplace- Summe gebildet werden.

$$F_n(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pn} f(n) dn$$

Mit $f(n) = e^{-n^2}$ folgt der diskretisierte Frequenzgang zu

$$F_n(p) = 1 + e^{-(p+1)} + e^{-2(p+2)} + e^{-3(p+3)} + \dots + e^{-n(p+n)},$$

wobei $p = \sigma + j\omega$ als komplexer Zeiger aufzufassen ist.

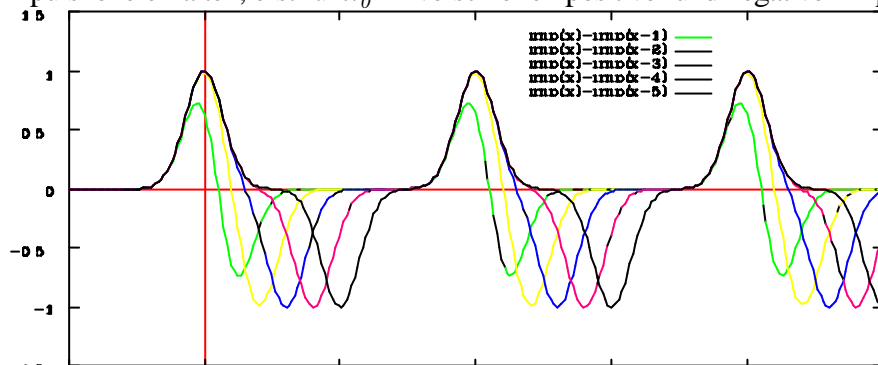
^{73]} Dobesch, H.: Laplace-Transformation von Abtastfunktionen. VEB Verlag Technik Berlin, 1970

Rechnungen mit Impulsfolgen

Zur Veranschaulichung der Eigenschaften von Produkten und Summen von Gauß- Impulsfolgen seien zunächst einige Beispiele dargestellt, bevor verallgemeinerbare Eigenschaften diskutiert werden.

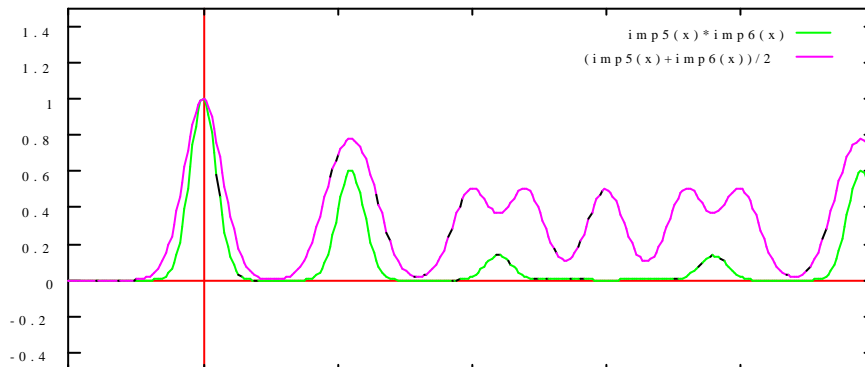
Differenz zweier Impulsfolgen

Subtrahiert man Funktion $imp(x)$ und verschobene Funktion $imp(x-x_0)$ voneinander, entstehen Impulsformen, wie sie aus der neuromedizinischen Diagnostik bekannt sind. Bis hinunter zu $x_0=2$ bleibt die Impulshöhe erhalten, erst für $x_0=1$ verschleifen positiver und negativer Impuls miteinander.



Summe und Produkt von Impulsfolgen

Im folgenden Bild sind Summe und Produkt der Funktionen $imp5(x)$ und $imp6(x)$ dargestellt. Die Produktinterferenz (untere Kurve) zeigt ein schärferes Selektionsverhalten. In Abhängigkeit von der Schwellenhöhe entstehen sichtbar verschiedene Ergebnisse.



Diskretisierte Summe (OR) von Impulsfolgen

Um zu untersuchen, inwiefern sich Multiplikation und Addition zweier Zeitfunktionen unterscheiden, wollen wir die Impulsfolge in Form diracartiger Stöße mit Einheitshöhe untersuchen.

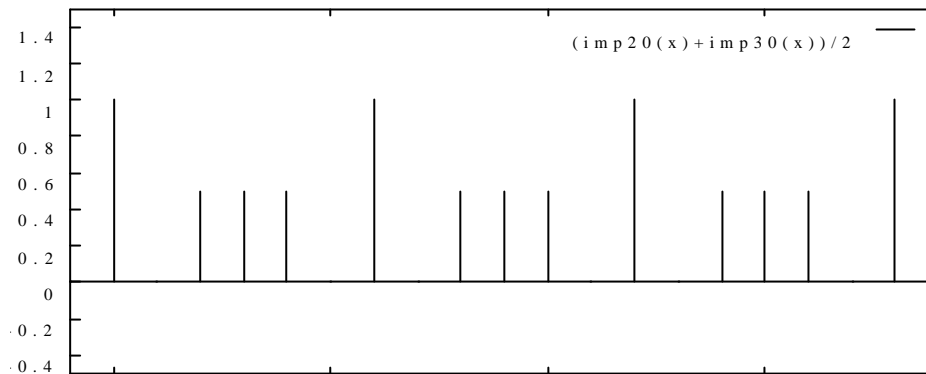
Werden große Zeitintervalle mit schmalen Impulsen betrachtet, kann die Ergebnisfunktion mit den Abtastwerten der Maxima approximiert werden. Im Bild dargestellt ist die diskretisierte Summe $imp20(x)+imp30(x)$. Die Indizierung 20 und 30 gibt den zeitlichen Folgeabstand der Impulse an.

Durch Abzählen kann trivial gezeigt werden, daß auch für Impulse die aus der Wechselstromtechnik (Amplitudenmodulation) bekannte Impulsfrequenz-Vervielfachung eintritt, sofern Funktionen

teilerfremd verschiedener Frequenz und Phasenlage summiert werden. Im Unterschied zu sinusidalen Funktionen können wir bei diracartigen Pulsfunktionen offenbar die Einzelfrequenzen addieren, um die Ergebnisfrequenz zu erhalten

$$f_{out} \leq f_1 + f_2 + \dots + f_n$$

wenn f_{out} die vom Summator gelieferte Frequenz, und f_1, f_2, \dots, f_n die Eingabefrequenzen darstellen, geeignete Schwellenfestlegung vorausgesetzt.



Die Frequenzen verhalten sich reziprok zu den zeitlichen Impulsabständen $f_i = 1/\tau_i$, folglich gilt für den Summator ebenso

$$f_{out} \leq \frac{1}{\tau_{out}} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \dots + \frac{1}{\tau_n}$$

wobei $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ die Zeitabstände der eingehenden Impulse charakterisieren.

Es ist zu beachten, daß die entstehende Frequenz f_{out} inhomogene Abstände der Impulse innerhalb jeder Periode besitzen kann, und daß die berechnete Ausgabefrequenz einen u.U. nicht direkt aus dem Bild ablesbaren Mittelwert repräsentiert.

Beispiel

Für unser Beispiel kann geschrieben werden:

$$f_{out} = 1/20\text{ms} + 1/30\text{ms} = 1/12\text{ms} = 83,3 \text{ Hz},$$

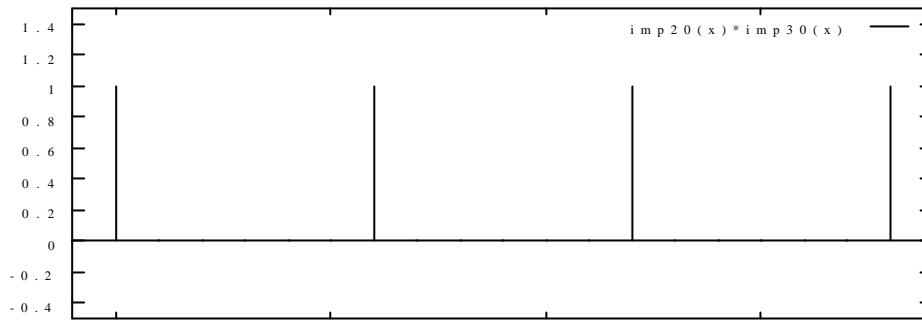
oder

$$\text{imp}20 + \text{imp}30 = \text{imp}12.$$

Dieser Fall entspricht der Boole'schen OR- Funktion, dem Maximum- Operator der Fuzzy- Logic, oder dem mit dem Wert jedes Eingangs gewichteten Output in der Schwellwertlogik.

Diskretisiertes Produkt, Multiplikation (AND) von Impulsfolgen

Produkte von Impulsfolgen liefern nur an Stellen gemeinsamer Vielfacher (an der Stelle eines Interferenzknotens) den Wert Eins.



Sind die Funktionen teilerfremd, d.h. gibt es keine Überdeckung zwischen gemeinsamen Vielfachen, so wird das Ergebnis der Multiplikation bei idealisiert schmalen Impulsen Null sein.

Im Bild dargestellt ist das Produkt $a(t)*b(t) = imp20*imp30$. Es ist zu erkennen, daß nur Vielfache der Eingangsfrequenzen eine Ausgabe liefern, im Ergebnis entsteht die Produktfolge $imp60$.

Zur Herleitung des Verknüpfungsprodukts wird zur Darstellung einer Impulsfolge eine Folge von Einzelimpulsen $\delta(t-n\tau)$ betrachtet.

$$a(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(t - i\tau_a)$$

$$b(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta(t - j\tau_b)$$

Als Lösungsmenge entsteht bei der Multiplikation der Folgen die Schnittmenge für alle gleichen Produkte

$$i\tau_a = j\tau_b.$$

Als allgemeine Lösung entsteht die Impulsfolge

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau), \text{ mit } \tau = i\tau_a = j\tau_b$$

Multiplikation von Impulsfolgen

Sie besitzt die Frequenz

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{i\tau_a} = \frac{1}{j\tau_b}, \text{ mit } \frac{i}{j} = \frac{\tau_b}{\tau_a}$$

Beispiel

Für unsere Produktfolge in obigem Bild gilt

$$\tau_a = 20 \text{ ms}, \tau_b = 30 \text{ ms}$$

$$i/j = 30 \text{ ms} / 20 \text{ ms} = 3/2$$

$$\tau = 1/f_{out} = i \cdot 20 \text{ ms} = j \cdot 30 \text{ ms} = 60 \text{ ms}$$

oder

$$imp20 \cdot imp30 = imp60.$$

Dieser Fall entspricht der Boole'schen AND- Funktion, dem Minimum- Operator der Fuzzy- Logic, oder dem mit der Summe der Eingänge gewichteten Output der Schwellwertlogik.

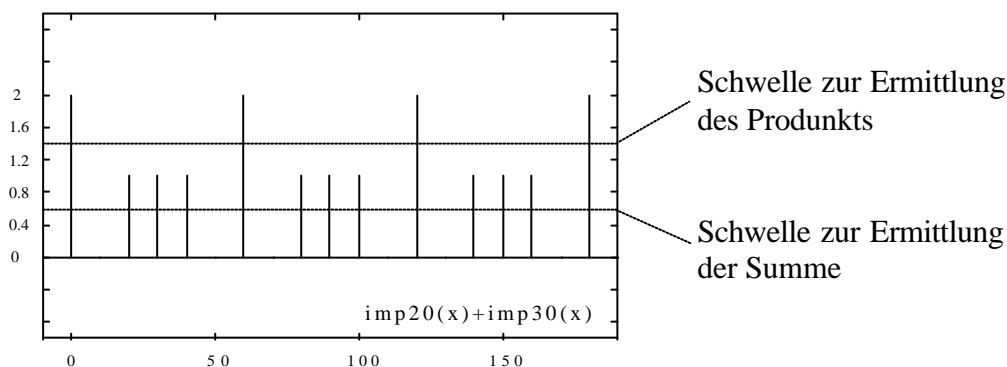
Identität von Summe und Produkt

Interferenzielle Abbildungen sind an lokale Multiplikation in den Empfängern gebunden. Bei der Behandlung von Impulssammlern hingegen stoßen wir auf das Problem, Neuronen vom Typ des

Addierers zu benötigen. Erlernt das Neuron seine logische Funktion? Kann es die logische Funktion ändern?

Die Untersuchung der Wirkung der Glia aus informatischer Sicht zeigte eine Schwellenanhebung des betreffenden, neuronalen Gebiets an. Refraktarität führt ebenso zur vorübergehenden Schwellenanhebung. Die Vermutung liegt nahe, daß die Schwellenanhebung eine für die Neuro-Informatik relevante Bedeutung besitzen könnte.

Sehen wir uns das Ergebnis einer Schwellenanhebung zunächst im Beispiel an. Die Simulation zeigt nochmals eine bereits oben dargestellte Summation zweier Impulsfolgen mit den Abständen 20 und 30 zwischen den Impulsen. Benutzen wir den Schwellwert a als Entscheidungsschwelle für Erregung oder Ausgabe eines Neurons, so entsteht eine dichte Pulsfolge, die die Summation der Folgen repräsentiert. Heben wir nun die Schwelle auf das Niveau b , so bemerken wir eine Ausdünnung der Ergebnisfolge. Vergleichen wir diese Ausdünnung Wert für Wert mit dem weiter oben dargestellten Ergebnis der Multiplikation zweier Impulsfolgen, stellen wir Identität fest!



Es ist zu erkennen, daß eine Schwellenverschiebung etwas gleichartiges vollbringt, wie der Übergang vom additiven auf den multiplikativen Verknüpfungstypus. Offenbar ist die Operation der *Multiplikation* positiver Impulsfolgen *identisch der Summation mit verschobenem Schwellwert*. Bei nachfolgender Triggerung ist der Satz anwendbar, daß die Multiplikation positiver Impulsreihen gleich ist deren Addition samt Schwellenanhebung, in Zeichen

$$y(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) \dots f_n(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) - C \quad \text{Identität von Summe und Produkt}$$

mit $C = n-1/2$ für $f_{\max}(z) = 1$.

$f\{z\}$ möge die Impulsfolge darstellen, C möge die Schwellenanhebung in Bezug auf die Amplituden der Eingangsfolgen charakterisieren. C ist von der Summe der Eingangsspannungen zu subtrahieren. Der auswertbare Schwellwert ausgangs der Formel liegt bei Null.

Dieser Sachverhalt sollte nicht nur im Beispiel gelten.

Beweis

Zum Beweis gehen wir von diskret vorliegenden Impulsmengen aus, deren Wertevorrat im Bereich der natürlichen Zahlen liegen mag. Es mögen zwei Impulsfolgen $n=2$ genügen.

Die **Multiplikation** kann in Form einer Folge dargestellt werden:

$$f_a = f(i \cdot a)$$

$$f_b = f(j \cdot b)$$

$$f_a \cdot f_b = f(i \cdot a) \cdot f(j \cdot b)$$

Nun möge aber für natürliche i, j, a, b gelten

$$f(x) \cdot f(y) = 0 \quad \text{für} \quad x \neq y$$

$$f(x) \cdot f(y) = 1 \quad \text{für} \quad x = y$$

Unmittelbar

$$\text{aus} \quad i \cdot a = j \cdot b \quad \text{folgt} \quad f_a \cdot f_b = 1$$

$$\text{aus} \quad i \cdot a \neq j \cdot b \quad \text{folgt} \quad f_a \cdot f_b = 0$$

und daraus

$$\begin{aligned} f_a \cdot f_b &= f(i \cdot a) \cdot f(j \cdot b) \\ &= f(i \cdot a \cdot j \cdot b) \quad \text{für alle} \quad i \cdot a = j \cdot b \end{aligned}$$

Für die **Summation mit um $C = n - 1/2$ erhöhter Schwelle** gilt dagegen

$$f_a = f(i \cdot a)$$

$$f_b = f(j \cdot b)$$

$$f_a + f_b = f(i \cdot a) + f(j \cdot b) - C$$

Das Ergebnis kann zerlegt werden in zwei Folgen verschiedener Höhe.

$$f_a + f_b = 2f(z) + f(\text{sonst}) - C$$

In der doppelt hohen Folge finden wir die Multiplikation wieder

$$z = i \cdot a = j \cdot b$$

Sie ist genau dort, wo

$$z = i \cdot a \cdot j \cdot b \quad \text{gilt, siehe oben.}$$

Folglich gilt mit $n = 2$: $C = n - 1/2 = 1,5$

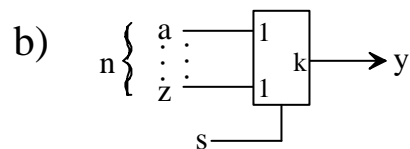
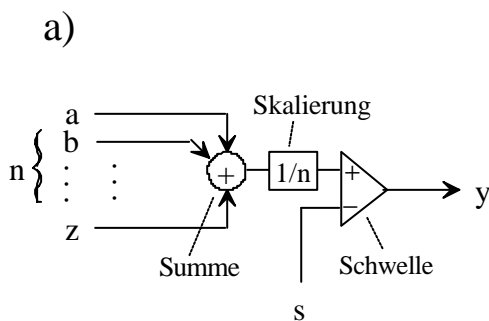
$$\begin{aligned} f_a + f_b &= 2f(z) + f(\text{sonst}) - C \\ &= 2f(ia \cdot jb) + f(\text{sonst}) - C \\ &= f(ia \cdot jb) \end{aligned}$$

für alle $i \cdot a = j \cdot b$; wzbw.

Das ist das Ergebnis der Multiplikation.

Ersatzschaltung Multiplizierer/Addierer

Wie kann man sich eine technische Realisierung eines Multiplizierers für Impulsfolgen vorstellen? Offenbar sind die einkommenden Signalwerte zu addieren. Im zweiten Schritt wird mit einem Komparator gleichzeitig die Schwellenhöhe festgelegt und das Ausgangssignal digitalisiert, Werte oberhalb der Schwelle werden mit 1, Werte unterhalb der Schwelle mit 0 ausgegeben.



Multiplizierer/Summierer:

Ersatzschaltung a) und Symbol b)

Mit dem Schwellwerteingang s wird gleitend die Funktion eingestellt.

$$s = 1/(2n) \quad \text{OR-Charakteristik (Summe)}$$

$$s = 1 - 1/(2n) \quad \text{AND-Charakteristik (Produkt)}$$

Das Schaltsymbol ist im Sinne der Schwellwertlogik zu lesen: Die Ausgabe wird positiv (1), wenn

die Summe der mit 1 gewichteten Eingänge $a...z$ größer ist als k . Der an den Eingang s anzulegende Wert entspricht direkt dem in das Symbol des Schwellwertgatters einzutragenden Wert für k .

In der technischen Realisierung ist die Ersatzschaltung für numerische Implementierungen geeignet. Bei Realisierung in Hardware sollten die an den Summierer anzulegenden Signalspannungen $a...z$ vorher mittels Spannungsteiler auf das $1/n$ -fache reduziert werden, entsprechend wird s bzw. k um $1/n$ reduziert.

Pulsverknüpfende Schaltungen

Mit der Entschlüsselung der informatorischen Wirkung von Schwellenverschiebungen stehen Mittel zur Verfügung, biologische Informationsverarbeitung zu studieren. Wenn eine niedrige Feuerfrequenz eines Neurons einem logisch niedrigen Signalwert, und eine hohe Feuerfrequenz einem logisch hohen Signalwert entspricht, so bildet die Multiplikation (AND) zweier Impulsfolgen eine Ergebnisfrequenz, die stets kleiner oder gleich der kleinsten, einkommenden Frequenz ist.



Die Addition (OR) bildet eine Ergebnisfrequenz, die stets größer oder gleich den einkommenden Frequenzen ist. Da hemmende Synapsen und deren Funktion bestens bekannt sind⁷⁴⁾, steht auch ein signalinvertierendes Element zur Verfügung. Unter der Maßgabe, Multiplikations- oder Additionsverhalten eines Neurons werden über Schwellwerte eingestellt (dabei werden die Eingangsgewichte der Synapsen entsprechend aktivierend oder hemmend modifiziert), ist die biologische Informationsverarbeitung mit Impulsen somit über den Zwischenschritt der Schwellwertlogik vollständig auf die Grundelemente der Boolesche Algebra (AND, OR, Inversion) abbildbar.

Relationen zwischen Impulsmengen

Schreibweise

Statt der Impulsfunktion eines Einzelimpulses $\delta(t-\tau)$ soll vereinfacht das Argument, der Zeitpunkt τ des Maximalwertes des Impulses, in geschweifte Klammern geschrieben werden.

$$\delta(t-\tau) \stackrel{df}{=} \{\tau\} \quad \text{für } \tau \in G$$

Analog soll eine Impulsfolge einfacher durch den Folgeabstand der Impulse $[n\tau]$ bezeichnet werden. Unabhängig davon wird die Menge der Einzelimpulse (die zB. zu einer Impulsfolge gehören) mit eckigen Klammern bezeichnet.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-n\tau) \stackrel{df}{=} [n\tau] \quad \text{für } [n\tau] \in G \quad (\text{aber als Menge: } \{X\} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}) .$$

Addition/Subtraktion

Die Impulse zweier Impulsfolgen addieren sich als Vereinigungsmenge, wenn entsprechend niedrige Schwellwerte betrachtet werden.

⁷⁴⁾ J.Dudel in Schmidt, R.F., Thews, G.: Physiologie des Menschen. 24. Auflage, Springer 1990, S.45 ff

$$\{X\} + \{Y\} = \{X \cup Y\} = \{X, Y\}$$

Es ist gleichgültig, ob Einzelimpulse $\{x\}$ oder Mengen von Einzelimpulsen $\{X\}$ zur Verfügung stehen.

Kommutation

Die Zusammenfassung zweier Impulsmengen ist kommutativ.

$$\{X, Y\} = \{Y, X\}$$

Multiplikation

Wird vorausgesetzt, daß das Argument nicht in der Form $(t-n\tau)$ substituierbar ist, und daß x und y teilerfremd sind, gilt

$$imp(x) * imp(y) = imp(x * y) \quad \text{bzw.} \quad [X] * [Y] = [X * Y].$$

Man beachte, daß die Multiplikation der Funktionen als Multiplikation der Argumente ausgeführt wird, und umgekehrt (!).

Die Impulsmengen bilden den Durchschnitt.

$$\{X\} * \{Y\} = \{X \cap Y\}$$

Division

Unter der Voraussetzung, daß das Argument nicht in der Form $(t-n\tau)$ substituierbar ist, und unter der Annahme, daß x und y ohne Rest dividierbar sind, gilt formal

$$\frac{imp(x)}{imp(y)} = imp\left(\frac{x}{y}\right)$$

bzw.

$$\frac{\{X\}}{\{Y\}} = \left\{ \frac{X}{Y} \right\}.$$

Man beachte auch hier die Wechselbeziehung zwischen Funktionswert und Argument.

Potenz

Unter der Voraussetzung, daß die Impulsform des Ergebnisses $imp(x)$ vernachlässigbar ist (Rechteck), gilt

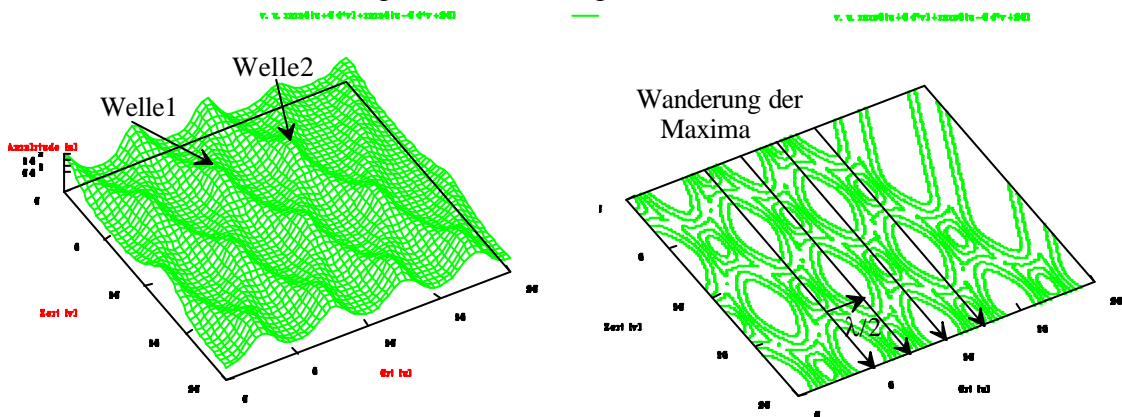
$$(imp(x))^n = imp(x)$$

bzw.

$$\{X\}^n = \{X^n\} = \{X\}$$

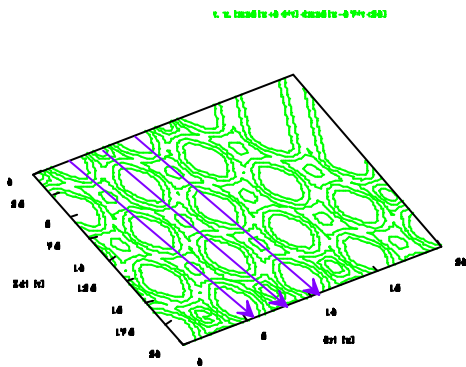
Vielfache

Vielfache von Impulsen sind bei multiplikativer Verknüpfung im kleinsten, gemeinsamen Teiler enthalten. $\{X\}$ ist echte Teilmenge von $\{Y\}$, wenn gilt

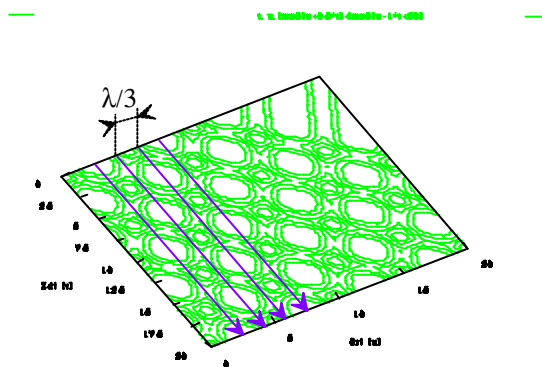


Zeitliche Wanderung gegeneinanderlaufender Impulsfolgen gleicher geometrischer Wellenlänge. Die Maxima erregen stets die gleichen, im Abstand der halben Wellenlänge liegenden Orte. Zwischen Frequenz und Ort besteht eine Zuordnung.

$\{Y\} \subseteq \{X\}$, für alle $\frac{Y}{X} \in N$ und $Y > X$ bzw.
 $[Y] = n[X]$, für alle $\frac{Y}{X} = n$; $n \in N$.



Wandernde Interferenzmaxima für teilerfremde verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Wellenfronten
 splot v,u,imp5(u+0.4*v)+imp5(u-0.7*v+20)



Stehende Interferenzmaxima mit Dreiteilung für verdoppelte Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Wellenfront
 splot v,u,imp5(u+0.5*v)+imp5(u-1*v+20)

Wanderung von Interferenzmaxima

Sofern wir den Mechanismus der Code-Raum-Zuordnung über Interferenzen als ursächlich für die prinzipielle Möglichkeit des Lernens lokal operierender Nervenzellen in stochastisch verschalteten Netzen ansehen mögen, so ist doch zu prüfen, unter welchen Codepaarungen diese Zuordnung überhaupt bestehen kann.

Eine Zuordenbarkeit zwischen Code und Raum ist an eine Bedingung geknüpft. Nur wenn sich die Interferenzmaxima an stets gleichen Orten ereignen, heben sich diese Orte energetisch gegen ihre Umgebung ab. Die Prüfung dieses Sachverhaltes möge banal erscheinen, da aus der Optik Interferenzmuster in Linienform bekannt sind. Eine genauere Untersuchung erbringt allerdings überraschende Ergebnisse.

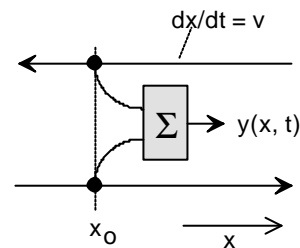
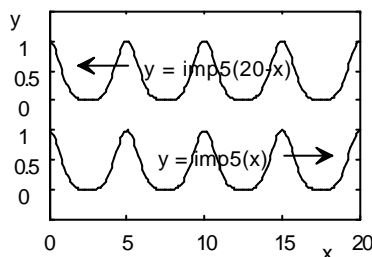
Gegenläufige Wellen in Selbstinterferenz

Zunächst ein Beispiel. Zwei Impulsfolgen, bestehend aus jeweils sechs Impulsen im Abstand von fünf Einheiten, mögen zur Prüfung des Vorhandenseins zeitinvarianter Maxima wie dargestellt gegeneinandergeführt werden.

$$y = \text{plot } \text{imp5}(x) + \text{imp5}(20-x)$$

Eine Impulsfolge kann in elementarer Form z.B. aus Einzelimpulsen bestehen.

$$\text{imp5}(x) = \exp(-x**2) + \exp(-(x-5)**2) + \exp(-(x-10)**2) + \exp(-(x-15)**2) + \exp(-(x-20)**2) + \exp(-(x-25)**2) + \exp(-(x-30)**2)$$



Zur Darstellung der Wanderung der Fronten bedienen wir uns einer parametrischen Darstellung mit normierten Größen.

Entlang der x -Achse wird jeweils für jeden normierten Zeitpunkt t/t_0 die Wellenfront berechnet, Parameter dafür ist v . Entlang der y -Achse wird die normierte Ortsfunktion x/x_0 berechnet, ausgedrückt durch den Parameter u . Der Funktionswert selbst wird in z -Richtung aufgetragen. Die Amplitude a entsteht ebenfalls aus einer Normierung.

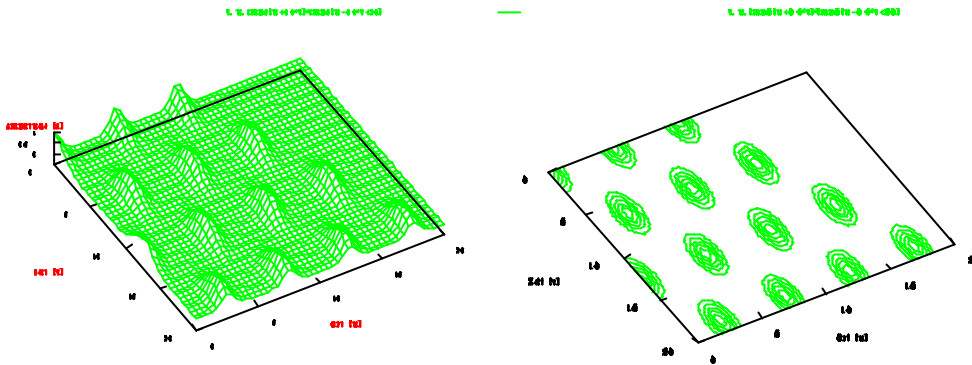
$$v = t/t_0; \quad u = x/x_0; \quad a = z/z_0$$

$$z = \{ \text{imp5}(u+0.4*v) + \text{imp5}(u-0.7*v+20) \};$$

Für GnuPlot folgt eine in den Bildern zu bemerkende Darstellungsform

$$\text{plot } v, u, \text{imp5}(u+0.4*v) + \text{imp5}(u-0.7*v+20).$$

Multiplikative Verknüpfung der Wellen verschärfte die Darstellung der Maxima.

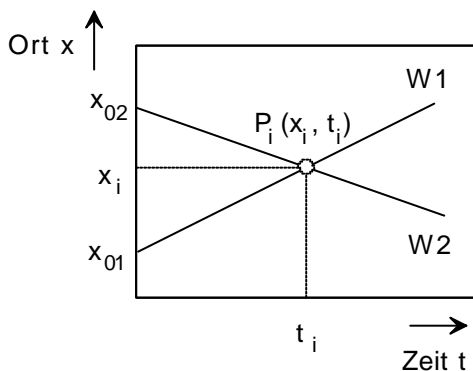


Für gleiche, geometrische Wellenlänge und gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit ist in diesem Fall der Abstand ξ der Maxima gleich der halben, geometrischen Wellenlänge λ ,

$$\xi = \lambda/2 = 1/2 v(t_{n+1} - t_n).$$

Das dies nur ein Sonderfall ist, zeigen die Bilder der Konturen anderer Wellenpaarungen.

Bestimmungsgleichungen für Maxima



Bestimmung des Wanderns der Maxima anhand eines 2-dimensionalen Modells.

- W1, W2: Wellenfronten
- $P_i(x_i, t_i)$: Interferenz-Maximum
- x_{01}, x_{02} : Startwerte

Ausgehend von den Gleichungen einer Impulswelle in der Zeitform und in der Ortsform

$$z(t) = f(t - t_0), \quad z(x) = f(x - x_0)$$

kann mit $x = \frac{dx}{dt}t$, $x_0 = \frac{dx}{dt}t_0$ eine Wellengleichung in Abhängigkeit von Ort und Zeit

$$z(x, t) = f(x - t)$$

$$z(x, t) = f(x - x_0 - \frac{dx}{dt}(t - t_0))$$

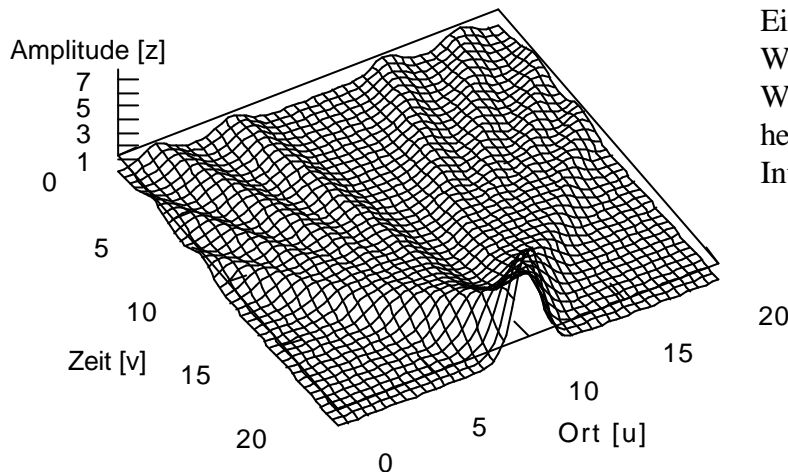
geschrieben werden. Offenbar läßt sich die Lösung dieser Gleichung für Abhängigkeiten zwischen Ort und Zeit ins Zweidimensionale verlagern, wenn nur die Ausbreitungsrichtungen der Maxima verfolgt werden. Für jede Welle kann dazu die Geradengleichung aus dem Argument gezogen werden.

$$x_i = \frac{dx}{dt}(t_i - t_0) + x_0$$

Mit $t_0 = 0$ und $v = \frac{dx}{dt}$ folgt

$$t_i = \frac{dt}{dx}(x_i - x_0) = \frac{1}{v}(x_i - x_0)$$

v ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. (Die vertauschte Kausalität, Zeit als Funktion des Ortes zu betrachten, möge dem einfachen, mathematischen Ansatz geschuldet sein).



Ein Beispiel zu interferentieller Wirkung. Während die einzelnen Wellen kaum zu erkennen sind, hebt sich der Impuls am Ort der Interferenz deutlich hervor.

Zu bestimmen sind die Interferenz-Maxima als Schnittpunkte $P_i(x_i, t_i)$ je zweier Wellenfronten. Dazu sind die Geradengleichungen der zwei Wellen gleichzusetzen, und nach dem Ort x_i aufzulösen. Der zweite Term sei zunächst gleichfalls mit positiver Richtung (v) definiert.

$$t_i = \frac{1}{v_1}(x_i - x_{01}) = \frac{1}{v_2}(x_i - x_{02})$$

Mit $c = \frac{v_2}{v_1}$ kann diese Gleichung nach x_i aufgelöst werden.

$$x_i = \frac{1}{1-\frac{1}{c}}x_{01} - \frac{1}{c-1}x_{02}$$

c resubstituiert folgt als Gleichung für die Bestimmung des Ortes eines Interferenzmaximums.

$$x_i = \frac{1}{1-\frac{v_1}{v_2}}x_{01} - \frac{1}{\frac{v_2}{v_1}-1}x_{02}$$

Bei Lösung dieser Gleichung für entgegengesetzt verlaufende Wellen ist die jeweilige Geschwindigkeit v_x mit negativem Vorzeichen einzuführen!

Zur Bestimmung aller Orte x_i der Maxima wäre jede durch eine Geradengleichung ausgedrückte Wellenfront mit jeder zu iterieren. Aus dieser Iteration entsteht eine Menge von Orten $M = \{x_i\}$. Die energetische Erhöhung dieser Orte für einen Code ist umso größer, je kleiner diese Menge $\{x_i\}$ sich darstellt, d.h. je weniger Elemente sie besitzt.

$\#\{x_i\} \rightarrow \min$.

Notwendiges Kriterium für die energetische Abhebung einer Codereferenz auf definierte Orte ist die Beschränktheit der Menge M der Orte von Maxima.

Durch Rekursion für $-c = n$, $n \in \mathbb{N}$ ($n = 2, 3, \dots$) ($n \in \mathbb{N}$ $c = \frac{v_2}{v_1}$) können für ganzzahlige Teilverhältnisse zwischen v_1 und v_2 Beziehungen zur Ermittlung des Ortes x_i der Interferenz zweier Wellen hergeleitet werden. c ist aufgrund der Gegenläufigkeit beider Wellen negativ.

c = -1: $x_i = \frac{1}{2}(x_{01} + x_{02})$

c = -n: $x_i = \frac{1}{n+1}(n x_{01} + x_{02})$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_i = x_{01}$

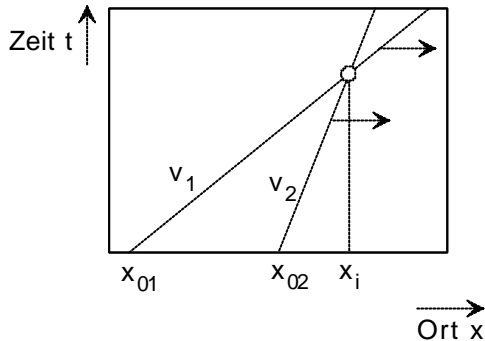
c = -1/n: $x_i = \frac{1}{n+1}(x_{01} + n x_{02})$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_i = x_{02}$

So ergibt sich für $c = -1$ trivial eine Halbierung des Intervalls.

Gleichlaufende Wellen in Selbstinterferenz

Zur prinzipiellen Klärung der Frage, wie es möglich ist, auf parallelliegenden Leitbahnen

(Rückenmark) einen weit entfernten Empfangsort zu adressieren, der sich von hunderten anderer Empfangsorte einzig durch seinen verschiedenen Abstand zum Sender (Pallium) unterscheidet, ist es nötig, in gleiche Richtung laufende Wellen auf verschieden schnell leitenden Bahnen auf Interferenzmaxima zu untersuchen.



In gleicher Richtung verlaufende Wellen besitzen Maxima, die außerhalb der Quellorte x_{01}, x_{02} liegen. Damit wird es möglich, über das Geschwindigkeitsverhältnis in der Ausbreitung beider Wellen einen Empfangsort x_i zu bestimmen.

Obiges Bild zeigt das Wirkungsprinzip. Ist die Geschwindigkeit v_2 kleiner als v_1 , erscheint Interferenz beider Wellenzüge außerhalb des Intervalls zwischen beiden.

Mit oben gezeigter Herleitung

$$x_i = \frac{1}{1-c}x_{01} - \frac{1}{c-1}x_{02} \text{ und } c = \frac{v_2}{v_1}$$

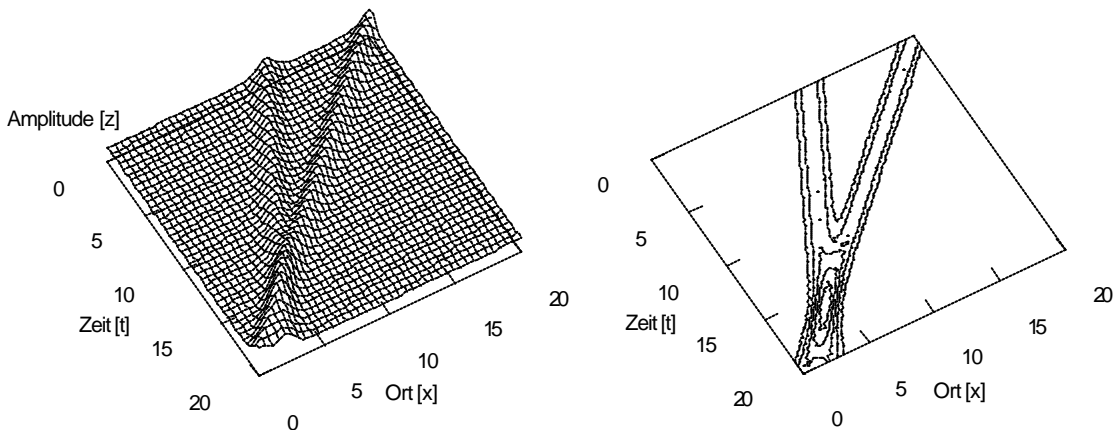
sind weitere Spezialfälle von Interesse.

c = +1: $\lim_{c \rightarrow 1} x_i = \pm \infty$

c = +n: $x_i = \frac{1}{n-1}(n x_{01} - x_{02}), \lim_{n \rightarrow \infty} x_i = x_{01}$

c = +1/n: $x_i = \frac{1}{1-n}(x_{01} - n x_{02}), \lim_{n \rightarrow \infty} x_i = x_{02}$

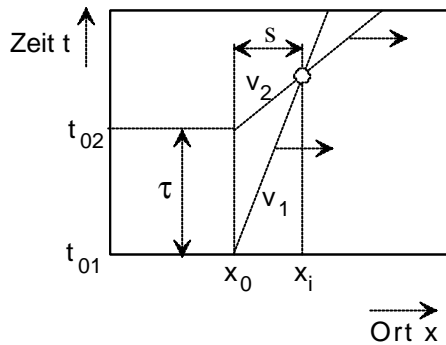
Impulse gleicher Leitgeschwindigkeiten interferieren bei gleichem Vorzeichen $c = 1$ erst im Unendlichen. Je näher v_1 und v_2 beieinanderliegen, desto weiter entfernt entsteht die Interferenz. Zur Diskussion des Grenzfalles $c = +n$ ist zu beachten, daß eine hohe Leitgeschwindigkeit von v_2 mit einem flachen Anstieg der Welle 2 verbunden ist, folglich treffen die Wellen bei x_{01} zusammen.



Gleichlaufende Wellen in Fremdinterferenz

Wellen, die zu verschiedenen Zeitpunkten ausgelöst werden, und die mit verschiedener Geschwindigkeit in dieselbe Richtung laufen, verursachen nach denselben Prinzipien, wie oben dargestellt, Interferenzen an entfernten Orten. Der Abstand s des Interferenzortes richtet sich nach

der Verzögerung τ der Einspeisung des zweiten Impulses, wie nach der Geschwindigkeitsrelation der voneinander verschiedenen Leitgeschwindigkeiten der beiden, betrachteten Bahnen.



Generierung einer Interferenz an einem entfernten Ort mittels zeitversetzter Impulse (Fremdinterf.). Wird die Welle 2 um τ verzögert, aber am selben Ort x_0 eingespeist, entsteht an einem über die Leitgeschwindigkeiten definierten Ort eine Interferenz im Abstand s .

Für das dargestellte System lauten die Geradengleichungen:

$$(1) \quad t_i = v_1(x_i - x_0) + t_{01}$$

$$(2) \quad t_i = v_2(x_i - x_0) + t_{02}$$

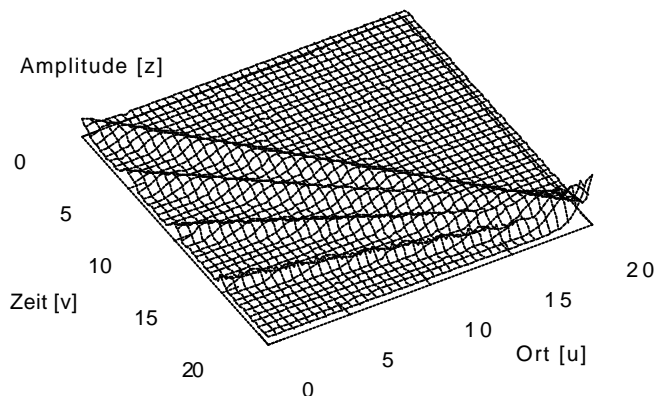
Gleichsetzung liefert eine Beziehung zwischen der Verzögerung τ der Einspeisung des zweiten Impulses, der Entfernung s des Interferenzmaximums vom Einspeisungsort, und den Geschwindigkeiten v_1, v_2 .

$$x_i - x_0 = \frac{t_{02} - t_{01}}{\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}} = \frac{v_2 v_1}{v_2 - v_1} (t_{02} - t_{01})$$

$$\frac{s}{\tau} = \frac{v_2 v_1}{v_2 - v_1}$$

Beispiel

Für die Leitgeschwindigkeiten $v_2 = 30 \text{ m/s}, v_1 = 10 \text{ m/s}$ und eine Verzögerung bei der Einspeisung entsprechender Impulse in verschieden schnelle Leitbahnen $\tau = 20 \text{ ms}$ folgt eingesetzt ein Abstand der entstehenden Interferenz von $s = 30 \text{ cm}$.



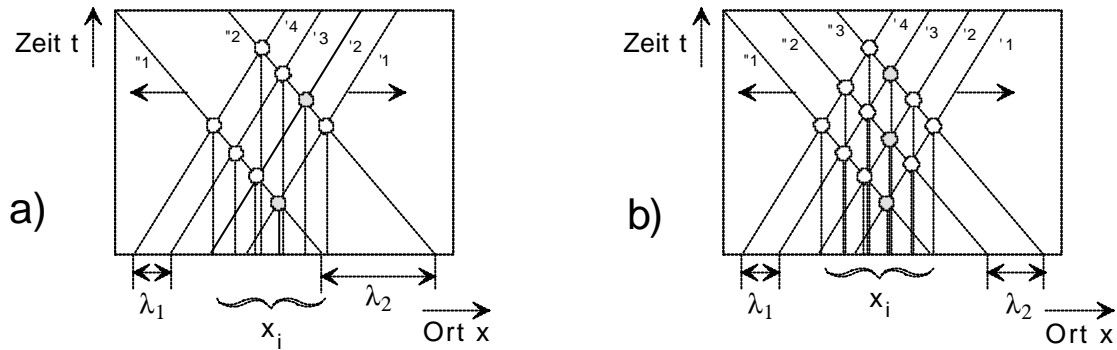
Fremdinterferenz einer Impulsfolge.

Zu den Zeiten $v = 0, 5, 10, 15$ werden bei $u = 0$ Impulse in Leitbahnen verschiedener Leitgeschwindigkeit gespeist. Im Beispiel sind die Geschwindigkeiten so gewählt, daß sich eine Interferenz am Ort $u = 20$ zur Zeit $v = 20$ ergibt.

Es ist zu erkennen, daß erst Interferenzerscheinungen die prinzipielle Adressierbarkeit von Regionen definierter Entfernung z.B. im Rückenmark erklären können. Ein Auswandern des Interferenzortes infolge von (temporären) Läsionen hat akut die (temporäre) Nichtadressierbarkeit des betreffenden Gebietes zur Folge, wenn infolge der Läsion Versorgungsprobleme der betreffenden Nerven entstehen, infolge derer die Leitgeschwindigkeiten verändert werden.

Maxima periodischer Zeitfunktionen

Um Aussagen über die energetische Anhebung bestimmter Orte durch periodische Codes bzw. Impulsfolgen zu gewinnen, sei zunächst das folgende Bild betrachtet. Es sind zwei gegeneinanderlaufende Folgen von Wellenzügen dargestellt, die verschiedene



Ausbreitungsgeschwindigkeit und verschiedene Wellenlänge besitzen.

Zur Beurteilung einer Häufung von Interferenzmaxima auf wenigen oder diskreten Orten genügt es offenbar, die Verschiedenheit der Interferenzorte aufeinanderfolgender Wellenzüge $x_{i,j}$, $x_{i+1,j+1}$ zu untersuchen. Weichen $x_{i,j}$ und $x_{i+1,j+1}$ auch nur ein inkrementelles Stück voneinander ab, driftet der Interferenzort langsam weg. Eine Häufung von Maxima an diskreten Orten kommt nicht zustande.

$$\Delta x_{i,j} = x_{i,j} - x_{i+1,j+1} = 0 ?$$

Ja: Die Maxima heben sich energetisch ab, Ortsselektion ist möglich.

Nein: Erhöhe i oder j . Bilde $x_{i+1,j}$ bzw. $x_{i,j+1}$. Prüfe die Differenz mit dem neuen Ort erneut auf Null.

Besitzt eine der Wellen die k -fache Wellenlänge der anderen, ist es möglich, daß Schritt zwei etwa k -mal ausgeführt werden muß.

Für den Sonderfall $c = 1$ (gleiche Geschwindigkeiten beider Kanäle) sind die aus Fourier- und Laplace-Transformation geläufigen Regeln anwendbar. Nur in diesem Falle kann die Ergebnisfunktion $f(t)$ aus der Faltung

$$f(t) = \int_0^T g(t) h(\tau - t) dt$$

der Zeitfunktionen $g(t)$, $h(t)$ miteinander abgeleitet werden.