

3. Zeitfunktionen digitaler Flanken

3.1. Flankenformen

Um die Zielstellungen des folgenden Kapitels zu erreichen, ist es notwendig, zu fragen, welche Systematisierungen zur Beschreibung des Eingangs- und des Ausgangsverhaltens digitaler Gatter nötig sind. Abb. 3.1 - 1 zeigt

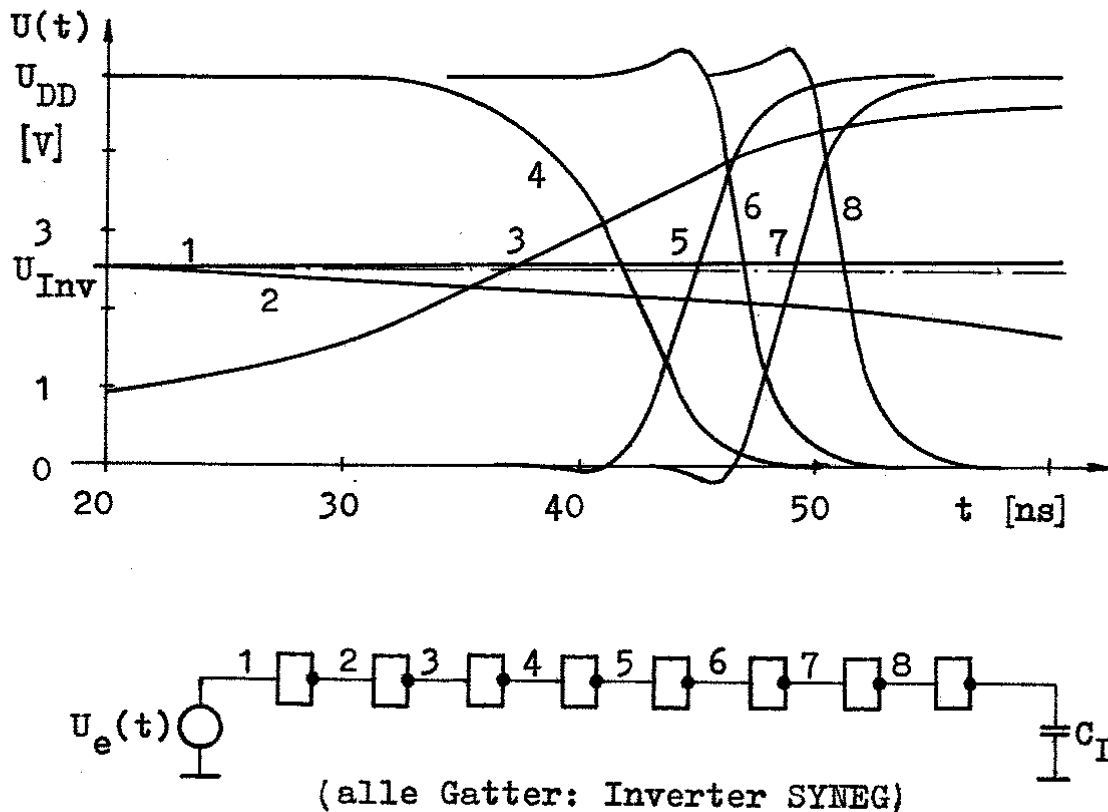


Abb.3.1-1

den Signaldurchlauf durch eine Kette identischer Gatter, (Inverter SYNEG) ausgehend von einer quasistatischen Flanke an Knoten 1. Es ist zu erkennen, daß qualitativ unterschiedliche Flankenformen auftreten. Auch entsteht die Frage, bei welcher Bezugsspannung Zeitmessungen vorgenommen werden. Zur Klärung der Frage ob verallgemeinerbare Flankeneigenschaften existieren, wurden Flanken, die aus unterschiedlichen Simulationen eines Gatters (Inverter SYNEG) stammen, im Anstieg so normiert, daß der Anstieg

$-|dU/dt|$ beim Durchgang durch den Pegel $U_{DD}/2$ identisch ist. Abb. 3.1 - 2 zeigt das Ergebnis. Als Eingangsfunktion zur Simulation wurden sinusförmige Flanken benutzt.

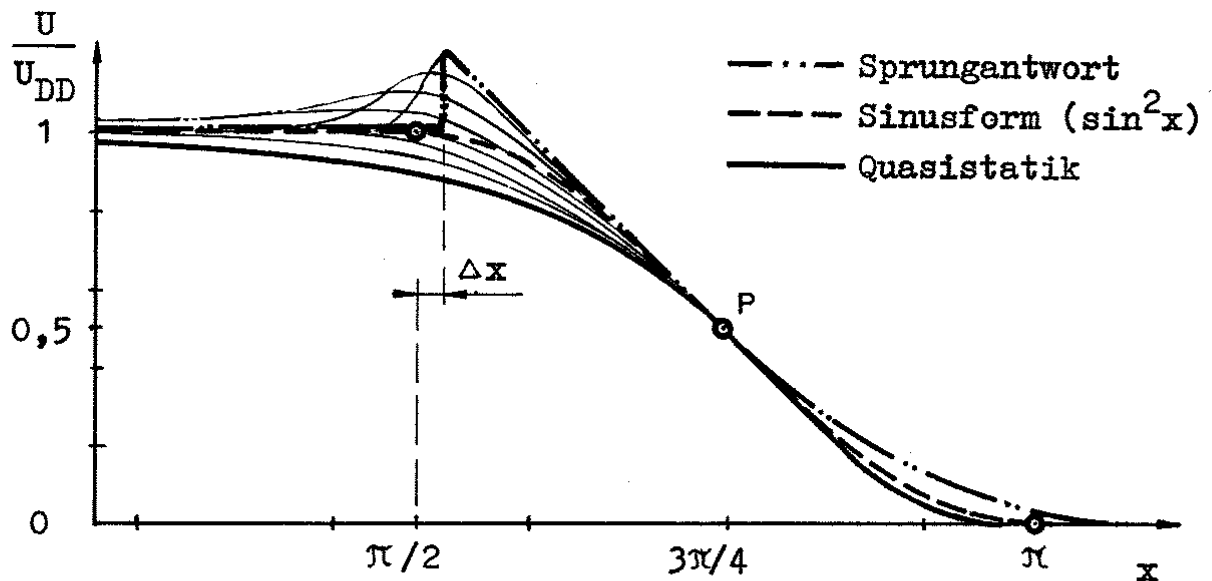


Abb.3.1-2: Auf gleiche Flankensteilheit im Punkte P normierte Ausgangsflanken des symmetrischen Inverters SYNEG. Zum Vergleich wurde eine sinusförmige Flanke mit dargestellt.

Es ist zu erkennen, daß nur wenige verallgemeinerbare Beziehungen zwischen aus unterschiedlichen Betriebsbereichen stammenden Flanken existieren. Die Kurvenkrümmung verläuft qualitativ unterschiedlich. Im Bereich der Quasistatik erscheint der Wendepunkt der Kurvenkrümmung (Maximum der Ableitung $|dU/dt|$) erst in der unteren Hälfte der Kurve, während das Maximum der Ableitung im Bereich der Sprungantwort weiter in der oberen Hälfte liegt, d.h. das Maximum der Flankensteilheit (der Nulldurchgang der zweiten Ableitung d^2U / dt^2) ist prinzipiell als Funktion des Arbeitsbereiches des Gatters angebar. Da jedoch die Eingangsfunktion, die im vorliegenden Fall sinusförmigen Charakter trug, ebenso die Ausprägung der Krümmungsqualität beeinflusst, brächte dieser Versuch keinen Nutzen, um in der Analyse der Gatterdynamik einen analytischen Erkenntniszuwachs zu bekommen. Abb. 3.1.- 2 zeigt aber, daß dennoch ein für die Untersuchung der Gatterdynamik nutzbares Kriterium existiert. Eine sinusförmige Eingangsflanke reproduziert im Mittel über alle Ausgangsfunktionen verschiedenster Betriebs-

bereiche des Gatters eine ebenfalls wieder etwa sinusförmige Ausgangsflanke. Diese Erkenntnis gab die Veranlassung, die Vermessungen der Betriebsbereiche des Inverters mit sinusförmigen Eingangsfanken durchzuführen. Die Frage, wie groß der in die Messung a priori eingehende Meßfehler durch Nutzung sinusförmiger Eingangsfanken ist, erscheint dabei nebensächlich, da dem realen Gatter in einem definierten Betriebsbereich stets Flanken angeboten werden können, die einsetzfallspezifisch sind, d.h. die den Charakter des Sprungantworttyps oder den des quasistatischen Typs besitzen können.

3.2. Taylorentwicklung

Es sei angenommen, die Flankenfunktion $U(t - t_0)$ einer digitalen Signalflanke lässt sich als konvergente Potenzreihe der Form

$$y(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots \quad (3.2.1)$$

darstellen.

Wird die Funktion gliedweise differenziert und der Grenzübergang $x \rightarrow x_0$ vollzogen, so ergeben sich für die differenzierten Funktionen die Werte

$$\begin{aligned} y(x_0) &= a_0 \\ y'(x_0) &= 1! a_1 \\ y''(x_0) &= 2! a_2 \\ y'''(x_0) &= 3! a_3 \\ &\vdots \\ y^{(n)}(x_0) &= n! a_n \quad \text{bzw.} \quad a_n = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Die Potenzreihe kann dann in der nach Taylor bekannten Form (siehe /B15/) dargestellt werden, wobei x_0 die Entwicklungsstelle angibt

$$\begin{aligned} y(x) &= y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \\ &\dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Mit den Nebenbedingungen

$$y(x) = U(t), \quad x = t, \quad x_0 = t_0, \quad y(x_0) = U_0$$

ergibt sich allgemein die Taylorentwicklung einer digitalen Flanke im Punkte (t_0, U_0) des Durchlaufes des Bezugspotentials U_0 und der Bezugszeit t_0 :

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 + (t - t_0) \frac{dU(t_0)}{dt} + (t - t_0)^2 \frac{d^2U(t_0)}{2 dt^2} + \\ &(t - t_0)^3 \frac{d^3U(t_0)}{6 dt^3} + \dots \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Die Flankenfunktion $U(t)$ liegt nicht in analytischer Form vor, da sie derzeit nur aus numerischen Lösungen von Netzwerksimulationen zu gewinnen ist. Moderne Netzwerksimulatoren besitzen die Eigen-

schaft, mit variabler Schrittweitensteuerung $t \neq \text{const.}$ zu arbeiten, deshalb liegt $U(t)$ als Summe einer Folge von diskreten Stützstellen mit nicht äquidistantem Zeitraster vor. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung,

$$\frac{U(t+h) - U(t)}{h} = U'(t + \sigma h), \quad 0 < \sigma < 1, \quad (3.2.5)$$

mit dessen Hilfe die höheren Ableitungen der Flankenfunktion hergeleitet werden sollen, ist umzuformen. Die Flankenfunktion lautet in Stützstellendarstellung:

$$U(t) = \sum_{n=0}^m (t_n, U_n) \quad (3.2.6)$$

Der Mittelwertsatz kann umgeschrieben werden:

$$\frac{U(t_{i+1}) - U(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = U'(t_i + \sigma(t_{i+1} - t_i)). \quad (3.2.7)$$

Unter der Annahme $\sigma = 0$ lassen sich Näherungen $U(t_i)$, $U'(t_i)$, $U''(t_i)$... der Koeffizienten der Taylorreihe angeben. Der Mittelwertsatz wurde aus formalen Gründen auf die doppelte Intervalllänge Δt erstreckt. Die Koeffizienten werden an der Entwicklungsstelle $(t_0, U_0) = (t_i, U_i)$ bestimmt.

$$U(t_i) = U_i, \quad (3.2.8)$$

$$U'(t_i) = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}, \quad (3.2.9)$$

$$U''(t_i) = \frac{U'_{i+1} - U'_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (3.2.10)$$

$$= \frac{1}{t_{i+1} - t_{i-1}} \left(\frac{U_{i+2} - U_i}{t_{i+2} - t_i} - \frac{U_i - U_{i-2}}{t_i - t_{i-2}} \right),$$

$$U'''(t_i) = \frac{U''_{i+1} - U''_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (3.2.11)$$

$$= \frac{1}{t_{i+1} - t_{i-1}} \left(\frac{U'_{i+2} - U'_i}{t_{i+2} - t_i} - \frac{U'_{i-2} - U'_i}{t_{i-2} - t_i} \right), \text{ usw..}$$

Die praktische Ausführung der Differentiationen kann zweckmäßigerweise mit einem Steigungsschema erfolgen.

Es ist zu erkennen, daß für den Fall des Abbruchs der Entwicklung nach der dritten Ableitung sieben Stützstellen $(i-3, \dots, i, \dots, i+3)$ benötigt werden.

Für den Fall äquidistanter Stützstellen $t = h$ ergibt sich für die Koeffizienten die bekannte Form:

$$U'(t_i) = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}, \quad (3.2.12)$$

$$U''(t_i) = \frac{1}{4h^2} (U_{i+2} - 2U_i + U_{i-2}), \text{ usw.} \quad (3.2.13)$$

In /B15/ S. 806 finden sich zahlreiche Methoden zur numerischen Differentiation, insbesondere sei auf die wenig bekannten Methoden der Vereinigung von Taylorentwicklung und numerischer Differentiation in Form sog. Interpolationspolynome, z.B. der von Newton und Lagrange, hingewiesen /B15/ S. 793, die bei nicht äquidistanten Stützstellen anwendbar sind.

Die Taylorentwicklung der Flankenfunktion $U(t)$ kann z.B. bereits nach dem ersten Glied abgebrochen werden. $U^*(t)$ stellt die Näherung der Funktion $U(t)$ dar.

$$U^*(t) = U_i + (t-t_i) \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (3.2.14)$$

bzw.

$$\boxed{U^*(t) = U_0 + (t-t_0) \left. \frac{dU}{dt} \right|_{U_0}} \quad (3.2.15)$$

Digitale Flanken besitzen die Eigenschaft, daß der Funktionswert $U(t)$ nicht größer als der hohe (U_H), und nicht kleiner als der niedrige Signalpegel (U_L) wird. Folglich hat $U^*(t)$ noch die Nebenbedingung

$$\boxed{U_L \leq U^*(t) \leq U_H} \quad (3.2.16)$$

mit $U_H - U_L = U_{\text{Hub}}$ zu erfüllen.

3.3. Integralkonstanz

Ist es mit der Taylorentwicklung nicht erschöpfend möglich, eine digitale Flanke zu charakterisieren, so bietet die Tatsache, daß jede digitale Flanke stets als Integral der Ableitung der Signalspannung nach der Zeit aufgefaßt werden kann, den Ansatz zur Bestimmung des allgemeinen Funktionstyps digitaler Flanken (Abb.3.3

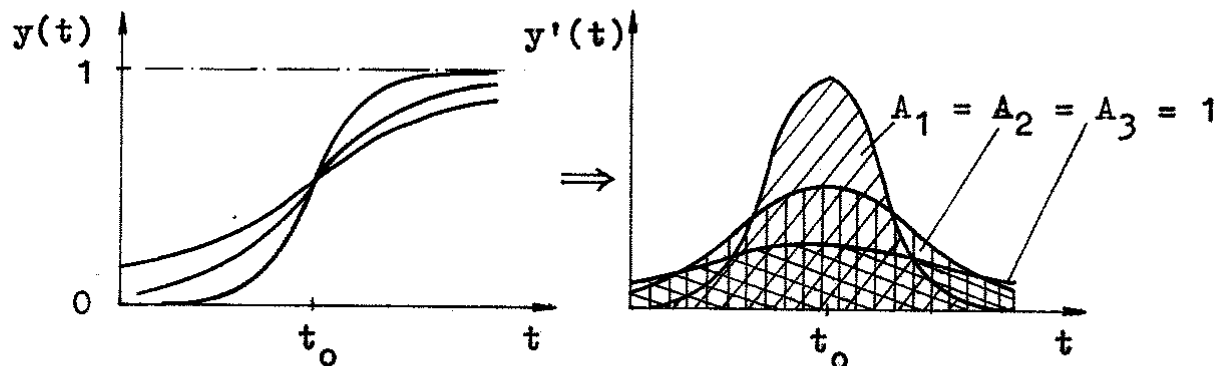


Abb.3.3-1

Mit $y(t) = U(t) / U_{\text{Hub}}$ und dem Grenzwert

$$\left| \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) - \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) \right| = 1 \quad (3.3.1)$$

kann eine digitale Flanke charakterisiert werden durch den Wert des bestimmten Integrals

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y'(t) dt = y(+\infty) - y(-\infty) = \pm 1. \quad (3.3.2)$$

Die Normierungsspannung U_{Hub} stellt im Allgemeinen den Signalhub des Gatters dar. Speziell für CMOS-Gatter ist U_{Hub} identisch der Betriebsspannung U_{DD} .

Eine Klasse symmetrischer Funktionen, die diese Bedingung erfüllt, ist bekannt, siehe Glg. 2.5.2 :

$$y'(t) = \pm \frac{n}{2 + e^{-nt} + e^{nt}}, \quad t_0 = 0. \quad (3.3.3)$$

Integration liefert die zugehörige Flankenfunktion

$$y(t) = \frac{1}{1 + e^{\mp nt}}. \quad (3.3.4)$$

Das Vorzeichen charakterisiert die Flankenrichtung. Die Funktion besitzt für $t=0$ ihr Maximum der Ableitung $y'(t)$ bei

$$y'(0) = \frac{n}{4} \quad (3.3.5)$$

Wird dieser Ausdruck in die Gleichung für $y(t)$ eingesetzt, ergibt sich eine allgemeine, elektrotechnische Darstellung der symmetrischen Flanke zu

$$y(t) = \frac{1}{1 + \exp(\mp 4 y'(0)t)} \quad (3.3.6)$$

$$U(t) = \frac{U_{DD}}{1 + \exp(\mp 4 \frac{dU}{dt} \frac{t}{U_{DD}})}$$

Mit der Einführung einer normierten Flankensteilheit f

$$f = y'(t) = \frac{1}{U_{Hub}} \frac{dU}{dt} \quad (3.3.7)$$

folgt

$$U(t) = \frac{U_{DD}}{1 + \exp(\mp 4 ft)} \quad (3.3.8)$$

Wird die Flanke mit beliebiger Bezugszeit t_0 gewünscht, so ist t durch $(t-t_0)$ zu substituieren.

Im Intervall $0 \dots 1$ wäre es ebenso möglich, die Funktion

$$y_s(t) = \sin^2 a \cdot t \quad (\text{steigende Flanke}) \quad (3.3.9)$$

bzw.

$$y_f(t) = \cos^2 a \cdot t \quad (\text{fallende Flanke}) \quad (3.3.10)$$

$$\text{mit } a = \frac{\pi}{2} f = \frac{\pi}{2U_{DD}} \cdot \frac{dU}{dt} \quad (3.3.11)$$

zu nutzen. Die Integrationsgrenzen sind von $-\infty \dots +\infty$ auf $0 \dots 1$ zu reduzieren.

Zwischen steigender und fallender Flanke gilt der bekannte Zusammenhang

$$\sin^2 at = 1 - \cos^2 at, \quad (U_{DD} / U_{DD} = 1); \quad (3.3.12)$$

beide Flankenrichtungen ergänzen sich komplementär zu 1.

Symmetrische Funktionen haben noch keine Bedeutung für die Vermessung bzw. Simulation digitaler Flanken erlangt. Aufgrund der

im folgenden begründeten Notwendigkeit der Einführung eines wählbaren Bezugspotentials U_0 bzw. U_{Inv} zur Verzögerungszeitdefinitivität ist es erforderlich, eine Klasse von unsymmetrischen Funktionen zu bestimmen, deren Funktionswert U_0 an der Stelle des Maximums der Ableitung vorgegeben werden kann.

3.4. Sinusförmige Meßflanke

Um eine genaue Analyse von Verzögerungszeit und Flankensteilheit der Ausgangsflanke durchführen zu können, ist es erforderlich, eine Eingangsflanke zu wählen, die gestattet, zu einer vorwählbaren Zeit t_0 mit wählbarer Flankensteilheit f_0 ein vorwählbares Bezugspotential U_0 zu durchheilen. Die Flanke soll sinusförmigen Charakters sein. Der Bereich maximaler Flankensteilheit (Nulldurchgang der zweiten Ableitung d^2U / dt^2) soll genau im Durchgang durch die Inverterschwelle erreicht sein. Es wurde eine spezielle FORTRAN-Prozedur für den Netzwerksimulator NIFAN /N3/ entwickelt, die aus zwei normierten, im Bezugspotential aneinander paßfähiger sinusförmigen Teilfunktionen besteht. In Abb. 3.4-1 ist zur Demonstration das Verhalten der Prozedur für das Durchlaufen von neun unterschiedlichen Bezugspotentialen $U_0 = 0,5 \dots 4,5V$ mit identischer Flankensteilheit dU/dt zum Zeitpunkt $t=t_0$ angegeben.

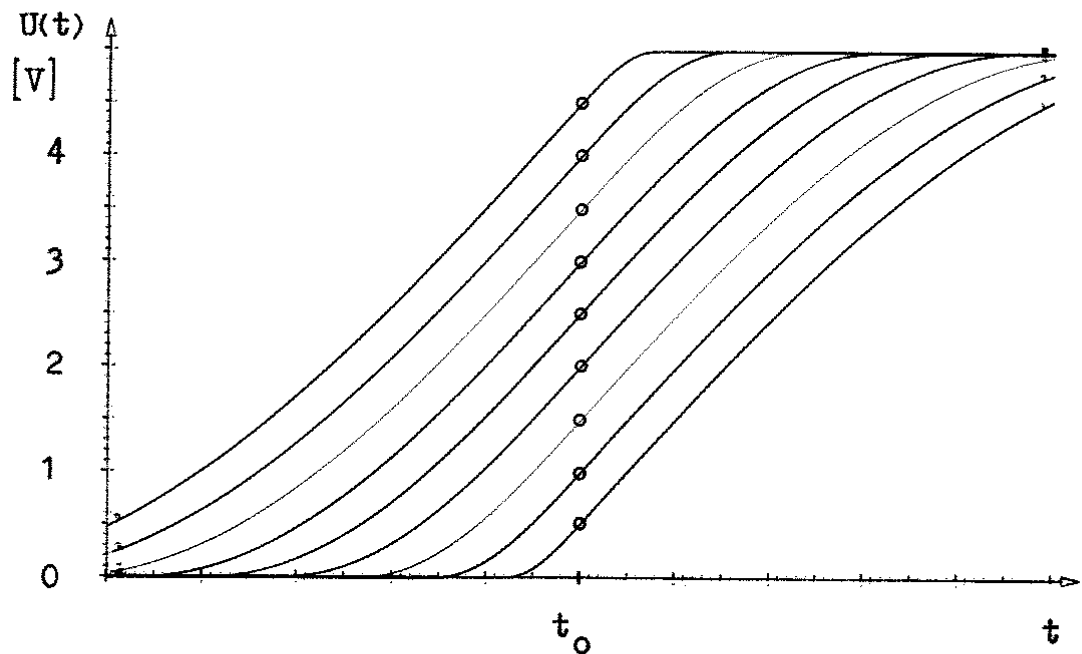


Abb.3.4-1: Sinusförmige Flanken, die mit der Prozedur EDGE generiert wurden. Im Punkt t_0 besitzen alle Flanken identische Flankensteilheit.

Zum Zeitpunkt $t = t_0$ erreicht die Flanke ihre maximale Flankensteilheit f_0 . Die Prozedur EDGE ist z.B. als gesteuerte Spannungsquelle aufrufbar; zB. in der Form:

Uname knoten - erde = EDGE (U_{Hub} , U_o , t_o , f_o)

U_{Hub} : Flankenhub

U_o : Bezugspotential

t_o : Zeitpunkt des Durchlaufes des Bezugspotentials

f_o : normierte Flankensteilheit

$$f_o = \frac{1}{U_{Hub}} \cdot \frac{dU}{dt}$$

(3.4.1)

Die Prozedur ist in Anlage 3 der Arbeit aufgeführt. Sie bildet die Voraussetzung dafür, die Gatterdynamik im Bereich der Quasistatik untersuchen zu können.

3.5. Potentiale und Spannungen

Im folgenden wird zwischen den Potentialen U_o , U_H , U_L und U_{DD} sowie der Spannung $U_{Hub} = U_H - U_L$ unterschieden. Die Unterscheidung ist nötig, um durch statische Ruheströme verursachte Restspannungen in Betracht ziehen zu können.

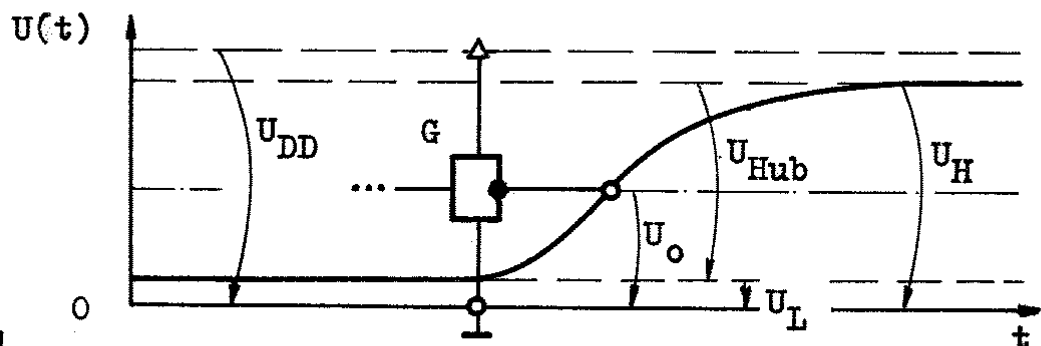


Abb.3.5-1

Abb. 3.5-1 zeigt symbolisch eine vom Gatter G getriebene Ausgangsflanke $U(t)$, die Signalpotentiale und -spannungen sind eingezeichnet.