

## 7. Approximation der Gatterdynamik mit der linearen Systemtheorie

Die folgenden Ausführungen werden in der Notation nach Vielhauer /V3/ geschrieben. Zeitfunktionen werden in geschweiften Klammern notiert, Bildfunktionen und Variable stehen außerhalb von geschweiften Klammern. Als Differentiationsoperator findet  $s$  Anwendung.

Es ist die Frage zu klären, ob die Gatterdynamik prinzipiell in Form z.B. eines NDTKF durch eine lineare Differentialgleichung der Form /B15/

$$b_0(x)y + b_1(x)y' + b_2(x)y'' + \dots = g(x) \quad (7.0.1)$$

beschrieben werden kann. Diese Frage ist insofern von allergrößter Bedeutung, als daß damit die perspektivische Weiterentwickelbarkeit des in den vorangegangenen Kapiteln aufgeführten theoretischen Apparates mit Hilfe der Werkzeuge der linearen Systemtheorie wie der Funktionaltransformationen (z.B. der Laplace-Transformation /D14/, /D11/, /U1/; der diskreten Laplace-Transformationstypen z.B. /D12/, /V2/, /Z4/, der Fourier-Transformation /L2/) oder der Operatorentheorie /B6/, /M13/, /W7/... /W12/, /V3/ genutzt werden können. Eine operatorentheoretische Interpretation gäbe die Möglichkeit, beliebig geformte Flanken behandeln zu können.

Wie in Kapitel 5 dargelegt, ist der die Verzögerungszeit von Signalpfaden bestimmende Betriebsbereich des Gatters der der Sprungantwort. Der Betriebsbereich der Sprungantwort des Gatters soll deshalb bestmöglich approximiert werden. Betrachten wir die Sprungantwort näher, so ist der Exponentialtypus der Sprungantwort unübersehbar.

Das Gattermodell wird in zwei Abschnitte geteilt: in den der statischen Überföhrungsfunktion und in den Zeitverzögerungsteil.

### 7.1. Zeitverzögerung

Der Exponentialtyp der Sprungantwort gibt den Anhaltspunkt für die mögliche Überföhrungsfunktion des linearen Gattermodells. Die Faltung einer Funktion mit der Sprungfunktion ergibt das Integral der Funktion, das Integral der Funktion ist die Sprungantwort.

$$\{1 - e^{-t/\tau}\} = \{1\} * \left\{\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}\right\}, \quad (7.1.1)$$

$$\{u_a(t)\} = \{u_e(t)\} * \{g(t)\}. \quad (7.1.2)$$

Die Übertragungsfunktion  $\{g(t)\}$  läßt sich mit der Korrespondenz /V3/ S. 35

$$\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s - \alpha} \quad (7.1.3)$$

in die Bildfunktion

$$G(s) = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{s + 1/\tau} \quad (7.1.4)$$

transformieren. Formale Umformung von Gleichung 7.1.4 liefert

$$G(s) = \frac{1}{1 + s\tau} = \frac{y}{z}. \quad (7.1.5)$$

Mit  $\tau = RC$  ist Glg. 7.1.5 als Tiefpaß interpretierbar. Die adäquate Differentialgleichung zu Glg. 7.1.5 besitzt mit  $sy = y'$  und

$$z = (1 + s\tau) y \quad (7.1.6)$$

die Form

$$y' + \frac{1}{\tau} (y - z) = 0 \quad (7.1.7)$$

Für die numerische Berechnung interessant erscheint die aus 7.1.6 ableitbare Darstellung

$$y = z - s y \tau. \quad (7.1.8)$$

Wird die Kettenschaltung von Elementarfunktionen als Multiplikation interpretiert, kann Glg. 7.1.8 näherungsweise in der in Abb. 7.1-1 gezeigten Art dargestellt werden.



Abb.7.1-1

Verstärkung Differentiation

## 7.2. Statische Überföhrungsfunktion

Zur Ermittlung der statischen Überföhrungsfunktion wird die Eingangsfunktion  $\{x(t)\}$  mit der statischen Transferfunktion  $y(x)$  des Gatters nach Abschnitt 2.3. für  $I_a = 0$  und  $U_e/U_{Hub} = x$ ,  $U_a/U_{Hub} = z$  verknüpf, damit gilt  $\{z(t)\} = \{z(x(t))\}$ .

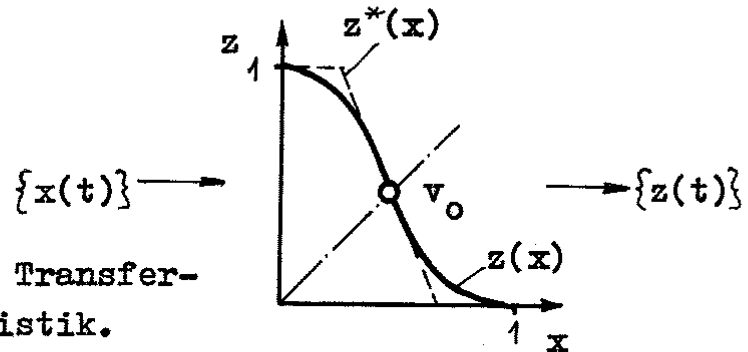


Abb.7.2-1: Statische Transfercharakteristik.

Näherungsweise kann diese Multiplikation durch die Linearisierung der statischen Transferkennlinie  $z^*(x)$  durch Leerlaufverstärkung  $v_0$  und Inverterschwelle  $U_{Inv}$  erfolgen, wobei die approximierte Funktion  $z^*(x)$  auf das Intervall  $z = 0 \dots 1$  begrenzt ist. Abb. 7.2-2 zeigt anschaulich eine Ersatzschaltung für die Approximation  $\{z^*(t)\} = \{z^*(x(t))\}$  der statischen Überföhrungsfunktion.

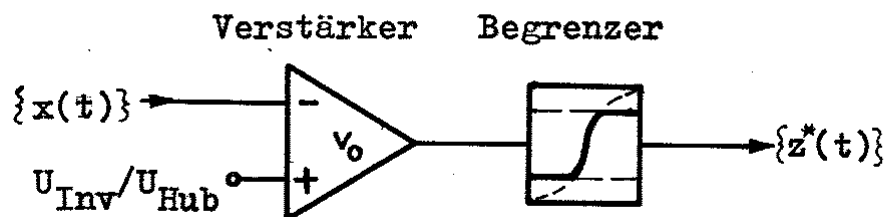


Abb.7.2-2

## 7.3. Faltungsmodell

Die Zusammenschaltung von statischer Überföhrungsfunktion (Glg. 7.2.1) und Verzögerungsfunktion (Glg. 7.1.5) führt zum in Abb. 7.3-1 dargestellten Faltungsmodell eines invertierenden Gatters.

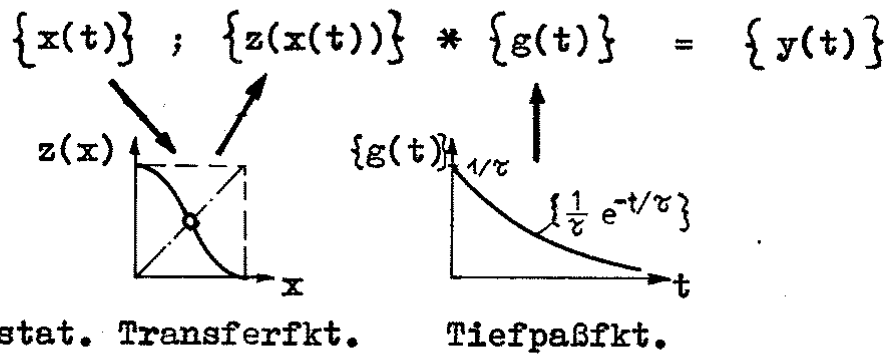


Abb.7.3-1

Unter Anwendung der Approximation  $\{z(t)\} = \{z^*(x(t))\}$  ist das Faltungmodell analytisch lösbar, jedoch mit hohem Rechenaufwand. Abb. 7.3-2 zeigt qualitativ Lösungen des analytischen Modells bei verschiedenen Zeitkonstanten  $\tau$ .

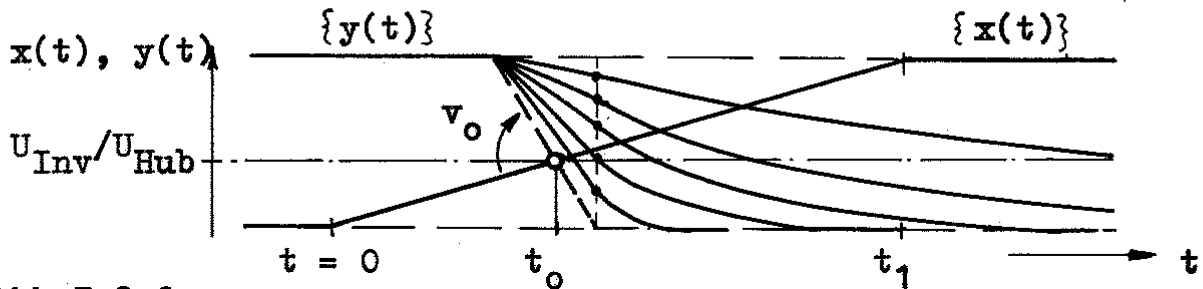


Abb.7.3-2

Als Eingangsfunktion  $\{x(t)\}$  fand eine modifizierte Rampenfunktion Anwendung:

$$\{x(t)\} = \frac{U_{Hub}}{t_1} \{t\} (1 - e^{-st_1}) \quad (7.3.1)$$

Die Ausführung der Faltung kann auf zwei unterschiedliche Arten erfolgen:

1. Interessiert nur die Flankensteilheit zu einem Bezugspotential so kann die Eingangsfunktion als modifizierte Rampenfunktion (nach Abb. 7.3-1) dargestellt werden.

Die Ausgangsfunktion setzt sich aus zwei Exponentialfunktionen zusammen. Diese Darstellung ist komplizierter und zugleich rechneraufwendiger als die Entnahme der Werte aus dem DTKF.

2. Ist die gesamte Flanke nachzubilden, so müssen beliebige Eingangsfankenformen gefaltet werden, denen keine analytische Funktion zugrunde liegt. Die Faltung ist in diesem Falle numerisch mit diskretisierten vorliegenden Eingangsfanken vorzunehmen. Es böte sich

an, sowohl statische Transferfunktion als auch Verzögerungsfunktion als stückweise stetige Funktionen abzulegen. Das Faltung integral nimmt in diesem Falle die Form

$$\{z(t)\} * \{g(t)\} = \sum_{i=0}^j z(t_j - t_i) g(t_i) \Delta t \quad (7.3.2)$$

(in Analogie zu /D12/, S. 35) an.

Der im Vergleich zur Netzwerkanalyse nötige Berechnungsaufwand ist unbedeutend geringer. Der Vorteil der Faltung liegt in der Iterationsfreiheit, Faltungen sind mit systolischen Prozessorfeldern /K11/... /K13/ parallel und iterationsfrei ausführbar.

Es ist zu erkennen, daß ein so gewonnenes Faltungsmodell des digitalen Gatters qualitativ scheinbar recht überzeugende Merkmale besitzt.

Die Leistungsgrenzen ergeben sich bei näherer Betrachtung der Zeitkonstanten.

#### 7.4. Zeitkonstantenverhältnis

Wird  $\tau$  als Zeitkonstante der Quasistatik  $\tau_Q$  interpretiert, ist erwarten, daß die Sprungantwort des Gatters verfälscht wird. Wird hingegen  $\tau$  als Zeitkonstante der Sprungantwort  $\tau_S$  verstanden, so wird der für die Gatterdynamik wesentliche Bereich der Sprungantwort nahezu richtig interpretiert. Das Verhältnis  $\tau_Q / \tau_S = v_\tau$  des Realgatters ist nur zufällig erreichbar: die Differentialgleichung des RC-Gliedes zwingt das NDTKF in eine starre Form. Das Verhältnis  $v_\tau$  ist festgelegt. Es läßt sich bestimmen, indem die Verzögerungszeit der Sprungantwort  $\tau_S$  des RC-Gliedes ermittelt wird. Für die Sprungantwort gilt

$$U_a(t) = U_{Hub} \exp(-t/\tau) \quad (7.4.1)$$

Mit  $U_a = U_{Inv}$ ,  $t = \tau_S$  und  $\tau = \tau_Q$  folgt über

$$U_{Inv} = U_{Hub} \exp(-\tau_S/\tau_Q) \quad (7.4.2)$$

eine Bestimmungsgleichung für  $v_\tau$  der RC-Approximation

$$\boxed{\frac{\tau_S}{\tau_Q} = \ln\left(\frac{U_{Hub}}{U_{Inv}}\right) = \frac{1}{v_\tau}} \quad (7.4.3)$$

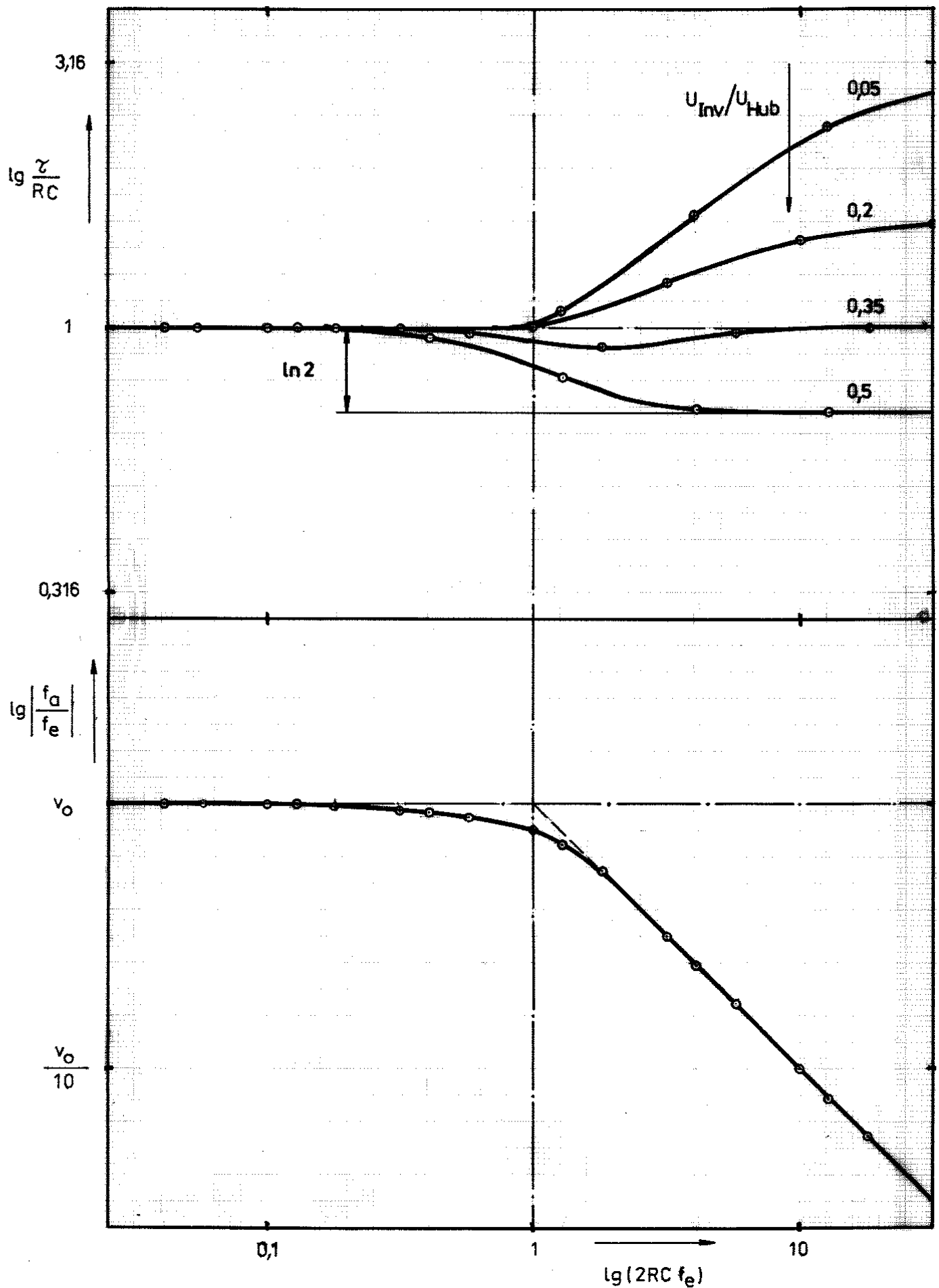


Abb.7.4-1: NDTKF des linearen Gattermodells mit RC-Tiefpaß. Verzögerungszeit  $\zeta$  und Flankensteilheitsverhältnis  $f_a/f_e$  in Abhängigkeit von der Eingangsflankensteilheit  $f_e$ .

des Faltungsmodells des digitalen Gatters. Glg. 7.4.3 zeigt, daß nicht nur das Verzögerungsverhältnis  $\tau_Q / \tau_S$  des Faltungsmodells festgelegt ist - dieser Mangel ließe sich bei der Fixierung auf die Sprungantwort übersehen bzw. ließe sich durch eine parametrische Zeitkonstantensteuerung beseitigen - darüber hinaus ist das Zeitkonstantenverhältnis noch eine fixierte Funktion der Inverterschwellspannung  $U_{Inv}$  des zu modellierenden Gatters. Zur Verdeutlichung des Verhaltens zeigt Abb. 7.4-1 ein numerisch ermitteltes NDTKF des Faltungsmodells bei sinusförmiger Eingangsflanke (Prozedur EDGE s. Anlage 3) für unterschiedliche Inverterschwellen  $U_{Inv}$ .

Es ist zu erkennen, daß ein lineares Faltungsmodell nur unter stark einschränkenden Bedingungen brauchbare Simulationsergebnisse liefern kann:

- 1) Unsymmetrische Flanken sind mit unterschiedlichen Zeitkonstanten zu modellieren.
- 2) Es kann entweder der Bereich der Sprungantwort oder der Bereich der Quasistatik hinreichend genau approximiert werden. Nur bei zusätzlicher parametrischer Zeitkonstantensteuerung ließen sich Ergebnisse erzielen, die ein richtiges NDTKF des Gatters wiedergeben, und die zugleich den Vorzug besäßen, die gesamte Flanke (und nicht nur den Entwicklungspunkt der abgebrochenen Taylorreihe) richtig darzustellen.